SÉRIE A, N° 2232
N° D'ORDRE :
3103

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Paul MULLER

1re THÈSE. — SUR UN NOUVEAU MICROMÈTRE A DOUBLE IMAGE, SES POSSIBILITÉS ET QUELQUES QUESTIONS CONNEXES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 5 juillet 1947, devant la Commission d'Examen.

MM. CHAZY *Président.*
CROZE, DANJON *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55
—
1948

SÉRIE A N° 2232
N° D'ORDRE :
3103

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Paul MULLER

1re THÈSE. — SUR UN NOUVEAU MICROMÈTRE A DOUBLE IMAGE, SES POSSIBILITÉS ET QUELQUES QUESTIONS CONNEXES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 5 juillet 1947, devant la Commission d'Examen.

MM. CHAZY *Président.*
CROZE, DANJON *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1948

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

Doyen..... M. J. CABANNES.

PROFESSEURS

L. BLARINGHEM...	T	Botanique.
G. JULIA.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
C. MAUGUIN.....	T	Minéralogie.
A. DENJOY.....	T	Théorie des fonctions.
L. LUTAUD.....	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
E. DARMOIS.....	T	Enseignement de Physique.
Robert LÉVY.....	T	Physiologie comparée.
Henri VILLAT....	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB.....	T	Géologie.
P. PASCAL.....	T	Chimie générale.
M. FRÉCHET.....	T	Calcul des probabilités et Physique Mathématique.
Mme RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN.....	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER.....	T	Electrotechnique générale.
De BROGLIE.....	T	Théories physiques.
JOB.....	T	Chimie générale.
PRENANT.....	T	Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY.....	T	Mécanique appliquée.
COMBES.....	T	Physiologie végétale.
GARNIER.....	T	Géométrie supérieure.
PÉRÈS.....	T	Mécanique rationnelle.
HACKSPILL.....	T	Chimie minérale.
LAUGIER.....	T	Physiologie générale.
TOUSSAINT.....	T	Technique Aéronautique.
M. CURIE.....	T	Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD.....	T	Hautes températures.
CHAZY.....	T	Mécanique analytique.
H. GAULT.....	T	Chimie appliquée.
CROZE.....	T	Physique théorique et Physique céleste.
DUPONT.....	T	Théories chimiques.
LANQUINE.....	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
VALIRON.....	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.
BARRABÉ.....		Géologie structurale et Géologie appliquée.
VAVON.....	T	Analyse et mesures chimiques.
G. DARMOIS.....	T	Mathématiques générales.
CHATTON.....	T	Biologie maritime.
AUBEL.....	T	Chimie biologique.
Jacques BOURCART		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE.	T	Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL.....	T	Botanique.
CABANNES.....	T	Recherches physiques.
GRASSÉ.....	T	Zoologie (évolution des êtres organisés).
PRÉVOST.....		Chimie organique.
BOULIGAND.....	T	Application de l'Analyse à la Géométrie
CHAUDRON.....	T	Chimie.
WYART.....		Minéralogie.
TEISSIER.....	T	Zoologie.
MANGENOT.....	T	Biologie végétale.
P. AUGER.....	T	Physique quantique et relativité.
MONNIER.....		Physiologie générale.
PIVETEAU.....		Géologie.
ROCARD.....	T	Physique.
H. CARTAN.....		Calcul différentiel.
SCHAEFFER.....	T	Physiologie des fonctions.
LAFFITTE.....		Chimie (P.C.B.).
LERAY.....		Mécanique théorique des fluides.
FAVARD.....		Calcul des probabilités et physique mathématique.
COULOMB.....	T	Physique du Globe
Mlle COUSIN.....		Biologie animale (P. C. B.).
CHRÉTIEN.....		Analyse et mesures chimiques.
DRACH.....		Evolution des êtres organisés.
CHÂTELET.....	T	Arithmétique et théorie des nombres.
EPHRUSSI.....	T	Génétique.
WURMSER.....	T	Biologie physico-chimique
KASTHER.....		Physique.
BAUER.....	T	Chimie-Physique.
RIVIÈRE.....		Géologie (P. C. B.).
GAUTHERET.....		Biologie végétale (P. C. B.).
LUCAS.....		Physique.
MAX MORAND.....		Physique.
ARNULF.....		Optique appliquée.
A. THOMAS.....		Zoologie.
SOLEILLET.....		Physique.
FORTIER.....		Mécanique expérimentale des fluides.
DANJON.....	T	Astronomie..
FROMAGEOT.....		Chimie biologique.
LAPORTE.....		Physique générale et Radioactivité.

Secrétaire..... CH. MONIER.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

A LA MÉMOIRE

DE MON FRÈRE ROBERT

Mort pour la France le 16 juin 1944.

A MON MAITRE

M. A. DANJON

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549220_0087

Commencé en 1937 à l'Observatoire de Strasbourg, le présent travail a été terminé en captivité. M. A. Danjon, alors Directeur de l'Établissement, et à qui je devais déjà toute ma formation, m'en a donné la première idée et l'a dirigé avec autant de compétence que de bienveillant intérêt. Il a bien voulu me faire profiter des ressources de l'Observatoire tant pour les observations que pour le montage des appareils. Je le prie d'accepter ici l'hommage de ce travail en témoignage de respectueuse gratitude.

J'adresse un souvenir ému et reconnaissant à la mémoire de M. G. Rougier qui a été pour moi un collègue d'une expérience toujours secourable et d'un inépuisable dévouement, et je suis heureux de pouvoir remercier ici M. A. Lallemand, pour ses directives pratiques dans la réalisation des pièces de mes appareils.

M. P. Lacroute, Directeur de l'Observatoire, a bien voulu s'intéresser à mon travail et le guider dans ses développements nouveaux; il m'a laissé dès son arrivée l'entière disposition des deux équatoriaux et s'est efforcé de me procurer le nouveau matériel optique nécessaire; qu'il en soit ici remercié bien sincèrement.

Grâce à M. R. Schneider, mécanicien de l'Observatoire, dont l'expérience et l'habileté m'ont été très précieuses, tous les appareils et accessoires ont été réalisés sur place; il n'a pas hésité parfois à dépasser ses heures de travail pour terminer une pièce dans l'intérêt des observations.

MM. Danjon et Lacroute ont revu mon texte, et M^lle^ M. Bourion a assumé une large part du travail matériel de dactylographie.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR UN NOUVEAU MICROMÈTRE A DOUBLE IMAGE, SES POSSIBILITÉS, ET QUELQUES QUESTIONS CONNEXES

INTRODUCTION.

Le micromètre à fils n'est pas d'un emploi rationnel dans les mesures de petits diamètres et d'étoiles doubles. Il est notoire que les mesures d'étoiles doubles de W. Struve, effectuées il y a plus d'un siècle, restent parmi les meilleures qui soient et que, par conséquent, le travail micrométrique n'a fait aucun progrès depuis.

On s'est attaqué aux sources d'erreur en cherchant à supprimer le fil ou la vis micrométrique, voire les deux, pour appliquer d'autres méthodes; mais aucun des appareils proposés n'est resté dans l'usage courant. Les astronomes modernes ont pensé trouver des méthodes plus sûres par l'emploi de l'interféromètre ou de la plaque photographique; ils ont obtenu un gain de précision notable, mais seulement dans des domaines assez limités. Ces deux méthodes sont loin de posséder l'universalité du procédé habituel et n'ont pu le remplacer.

Parmi les micromètres proposés à diverses époques, et tombés dans un oubli à peu près complet, plusieurs comportaient l'emploi de mesures par double image. Cette méthode est, en soi, fort intéressante, car elle permet de s'affranchir des erreurs dues à l'usage d'un organe solidaire de la lunette pour pointer des images mouvantes et, dans certains cas, de celles de la vis micrométrique. Toutefois, les appareils imaginés à partir de ce principe présentaient des défauts graves, notamment du point de vue de l'aspect des images, lequel était difficilement compatible avec l'emploi de grossissements élevés; aussi ne les avait-on guère appliqués qu'à la mesure des diamètres planétaires.

Le présent travail a pour but essentiel la description d'un appareil nouveau, de réalisation et d'emploi fort simples, dans lequel les avantages de la méthode de mesure par double image sont pleinement utilisés. Les résultats de trois ans d'observations se traduisent par un net gain de précision sur la méthode avec fils, une meilleure utilisation d'un instrument donné et la possibilité (dès maintenant exploitée) d'obser-

vations photométriques des plus intéressantes avec le même appareil légèrement modifié, mais restant utilisable pour les mesures micrométriques.

On a été amené, en outre, à développer l'étude théorique de divers prismes biréfringents, notamment d'un type nouveau imaginé pour servir dans le micromètre, et à établir ou vérifier par l'expérience certains résultats de cette théorie ainsi que les caractéristiques soit du micromètre, soit des méthodes de mesure.

PREMIÈRE PARTIE.

LE NOUVEAU MICROMÈTRE.

CHAPITRE I.

PRINCIPE DE LA MÉTHODE PAR DOUBLE IMAGE.

La méthode de mesure par double image peut être décrite très schématiquement de la façon suivante.

On dispose d'un moyen de dédoubler l'image A d'une étoile en deux images A_1 et A_2; on peut faire varier à volonté la distance de ces images et l'orientation de la ligne de leurs centres, et lire ces variations sur des organes de mesure appropriés. Supposons, en outre, que le dédoublement se fasse sans déformation, c'est-à-dire qu'il soit le même en grandeur et en direction pour tous les points d'une image étendue. Il est facile d'imaginer comment on mesurera alors un petit diamètre ou les coordonnées relatives dans une étoile double.

Considérons (*fig.* 1) les images D_1 et D_2 d'un disque (planète ou satellite). Partant de la coïncidence, écartons ces images jusqu'à les amener

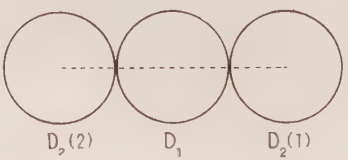

Fig. 1. — Mesure d'un diamètre.

en contact extérieur d'un côté, puis de l'autre; le déplacement relatif total de ces images, déduit de la différence des deux lectures, donne

le double du diamètre cherché. Le jugement demandé à l'œil est simple et sans ambiguïté; le contact de deux disques semblables s'apprécie, en effet, très bien comme limite des positions où apparaît au point de contact soit un filet clair, soit un filet sombre. Cela reste vrai même lorsqu'on tient compte du dégradé causé par la diffraction : le contact des disques apparents ainsi réalisé correspond à celui des disques théoriques. En outre, ce pointé se fait par l'observation d'un seul point du champ et non de deux points éloignés comme dans la méthode avec fils.

Passons maintenant au cas d'une étoile double. On observe (*fig.* 2) deux images A_1B_1 et A_2B_2 du couple. Le dédoublement est, par hypothèse,

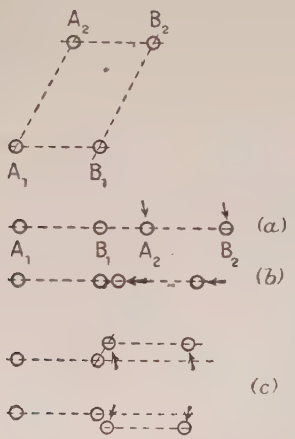

Fig. 2. — Mesure de l'angle de position, ordre des opérations.

le même pour A et pour B; il en résulte que les quatre images sont aux sommets d'un parallélogramme et, par suite, les images A_1B_1 et A_2B_2 du couple sont égales et disposées parallèlement entre elles et au couple primitif AB. On repère cette direction en faisant tourner l'appareil jusqu'à obtenir l'alignement des quatre images (*a*). Ayant dégrossi le pointé, on aura intérêt à rapprocher au maximum les images centrales B_1 et A_2 (*b*). Lorsqu'on agit alors sur la direction du dédoublement, le mouvement de A_2 par rapport à B_1 est très sensible, puisque A_2 tourne autour de A_1 et B_2 autour de B_1. Pour une très petite rotation de l'appareil, on voit donc B_1A_2 s'incliner notablement sur A_1B_2 (*c*).

En général, on recommencera le pointé dans la position symétrique par rapport à la coïncidence pour éliminer certaines erreurs.

Ces pointés sont d'autant plus aisés que la distance du couple est plus grande; aux très petites distances, on est gêné par l'importance des disques de diffraction devant les écartements et la méthode devient moins sensible. Elle n'est pas inférieure cependant à la méthode avec fils; d'autant plus que dans la mesure des angles aux petites distances,

de nombreux observateurs renoncent à la bissection pour placer le couple à proximité du fil, ou entre deux fils parallèles.

La mesure de la distance peut se faire par plusieurs méthodes. Remarquons d'abord qu'il ne faut pas espérer utiliser les coïncidences d'images et obtenir, par exemple, la double distance en amenant A_2 sur B_1, puis B_2 sur A_1 (*fig.* 3). Les étoiles se montrent toujours sous la forme de petits

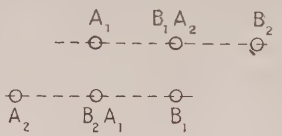

Fig. 3. — Mesure d'une distance, une méthode à rejeter (coïncidences d'images).

disques dont la superposition exacte est très mal estimée, surtout lorsque ces disques sont dissemblables par suite de la différence d'éclat des composantes. D'autre part, leurs contours ne sont pas ordinairement assez nets pour permettre de substituer à ce pointé les deux tangences des disques à superposer. Par des images parfaitement calmes, on mesure ainsi sans peine le diamètre du faux disque d'une étoile brillante; mais il ne peut être question d'en faire une méthode courante. Il ne reste donc qu'à utiliser certaines dispositions particulières des quatre images qui donnent, à l'ensemble, des aspects symétriques. Représentons ces aspects (*fig.* 4) sans y insister longuement; rappelons simplement qu'on réalise

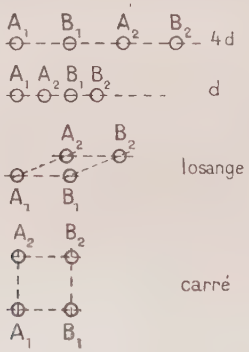

Fig. 4. — Méthodes de mesure d'une distance.

toujours, outre le pointé de la figure, celui qui en est symétrique par rapport à la coïncidence. La différence des deux lectures donne, suivant le cas, la simple, la double ou la quadruple distance.

L'expérience montre que l'œil apprécie certains de ces aspects plus sûrement que d'autres. Cette discrimination tient à des facteurs physio-

logiques qui nous échappent et dont les effets peuvent différer notablement d'un observateur à l'autre. Il semble toutefois que l'œil soit capable de juger avec précision de l'alignement équidistant de quatre points ou petits disques. Insistons sur le fait que le pointé ne repose pas sur la comparaison de tel élément de la figure à tel autre, par exemple l'égalisation de A_2B_1 à B_1B_2 ou de B_1A_2 à A_1B_1 dans le cas des équidistances, mais sur une estimation de la symétrie de l'ensemble. Toute notion de mesure proprement dite doit en être absente; c'est sans doute la raison pour laquelle les méthodes par double image sont plus agréables et moins fatigantes que la méthode ordinaire. On ne gagne rien non plus à s'attarder sur le pointé en cherchant à parfaire la symétrie de l'aspect. L'observateur trop scrupuleux en arrive à opérer, autour d'un pointé qui lui paraît approximatif, de petits déplacements auxquels l'œil est insensible; mais l'organe se fatigue et finit par rester indifférent à des écarts plus grands, surtout lorsqu'on agit très lentement comme il arrive précisément dans ces hésitations. Pour avoir un bon pointé et une mesure sans fatigue, il faut décaler les images franchement et assez brusquement de part et d'autre de l'aspect recherché, s'arrêter sur une position moyenne et lire aussitôt. Il est bon aussi de détruire le pointé avant de remettre l'œil à l'oculaire pour le suivant, afin de les rendre le plus possible indépendants.

On pourrait développer davantage ces considérations et signaler encore le rôle de la main et les précautions à prendre pour éviter que la mémoire musculaire n'intervienne pour reproduire les mêmes positions du tambour; il était utile surtout de souligner les différences entre les pointés par double image et la bissection à l'aide d'un fil.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS AUX MESURES MICROMÉTRIQUES.

Les méthodes de mesure par double image sont rigoureusement différentielles : l'écartement des deux étoiles ou des bords d'une planète n'est plus figuré en vraie grandeur par celui de deux objets matériels qui, si ténus soient-ils, auront toujours le grave défaut d'être solidaires de la lunette. Les irrégularités du mécanisme d'entraînement, les petites oscillations imprimées par le vent ou par les vibrations du sol, les mouvements des images, ne sont plus que d'une importance tout à fait secondaire dans l'exécution des mesures. Il faut consentir une exception pour déterminer l'origine des lectures en angle; on est bien obligé alors de matérialiser, au moyen d'un fil fixe, à la fois la direction du dédoublement par les deux images d'une étoile et le parallèle céleste par leur mouvement dans le champ de la lunette immobile. Mais il s'agit là d'un

emploi momentané du fil, dont on peut choisir au mieux les conditions; et ce n'est pas, au demeurant, pour cette mesure que nous critiquons l'usage du fil dans les micromètres ordinaires.

La méthode par double image paraît donc apporter une solution fort séduisante au problème de la mesure des petits objets et les astronomes ont cherché de mainte façon à réaliser un appareil qui permette son application correcte; nous ne nous arrêterons pas à décrire même les principaux parmi les dispositifs proposés (1).

Dans les uns, la division de l'image s'obtient en sciant une lentille ou un objectif, solution qui présente plusieurs inconvénients. Il semble d'abord qu'on ait quelque peine à obtenir de bonnes images et aussi à les faire passer en coïncidence, dans l'obligation où l'on se trouve d'écarter légèrement les moitiés séparées. D'autre part, on mesure un déplacement de l'ordre des dimensions de l'image alors que l'organe mobile n'a plus la légèreté du fil de cocon. Aussi, les micromètres de ce type ont-ils servi surtout à mesurer des diamètres planétaires assez grands, voire celui du Soleil (objet, précisément, de l'héliomètre), plutôt que des étoiles doubles.

Une seconde catégorie de micromètres à double image comporte, au contraire, l'emploi d'un prisme biréfringent qui reçoit et divise l'ensemble du faisceau. Chacun des rayons concourt à former les deux images, qui s'en trouvent moins altérées. D'autre part, si l'on utilise la translation du prisme, ce dernier est certes aussi lourd que la demi-lentille d'un appareil du premier type, mais ses déplacements représentent, en général, un fort multiple (plusieurs dizaines d'unités au moins) des écartements à mesurer. C'est là une propriété qui eût mérité plus d'attention et que ces micromètres sont seuls à posséder.

A propos de ce second type d'instruments, citons la variante assez curieuse constituée par le micromètre à boule de spath de Dollond, décrit également par Becker. Dawes, qui s'en était servi en même temps que de plusieurs autres (ceux-ci à prismes), lui reconnaissait l'avantage de donner les meilleures images (2). Nous avons pu, M. Danjon et moi-même, nous en assurer grâce à un exemplaire existant dans la collection de l'Observatoire de Strasbourg (3). Les images sont identiques et la rotation de la boule de spath n'altère pas leur bonne qualité; d'autre part, les déplacements obtenus sont symétriques par rapport

---

(1) *Voir* Becker, *Mikrometer und Mikrometermessungen*, extrait de *Handwörterbuch der Astronomie*, de Valentiner.

(2) *Mem. of the R. A. S.*, t. 35, p. 145.

(3) Il s'agit, à vrai dire, d'un oculaire à boule de spath tournante, l'axe de cette dernière étant muni d'un petit tambour divisé. Tout comme le micromètre de Steinheil de la collection, il a dû servir à Becker pour rédiger son chapitre de l'*Encyclopédie* de Valentiner.

à la coïncidence. Mais leur amplitude est faible; l'écartement des images est une fonction sinusoïdale de la lecture, de la forme

$$e = k \sin 2\theta,$$

où θ représente la rotation de la boule à partir de la position de coïncidence et k une constante inversement proportionnelle au grossissement. Cette loi, donnée par Dawes comme empirique, peut être établie très simplement à l'aide des calculs que nous ferons plus loin (p. 57).

Signalons enfin les récents essais de *micromètres à comparaison*, qui constituent une solution hybride puisque la seconde image est celle d'un objet solidaire de la lunette. Un modèle simple avait été construit par Duruy en 1937 pour la mesure des distances (l'angle s'obtenant par la méthode ordinaire); le couple artificiel était observé de l'œil libre à côté de la lunette. L'appareil donnait effectivement de meilleurs résultats que le micromètre à fils. Reprenant un dispositif de Hargreaves (1), Davidson et Symms ont réalisé un micromètre où le couple artificiel apparaît dans le champ (2); on peut agir sur les éclats des composantes et sur leur différence, de façon à égaliser complètement les deux images. Ce modèle perfectionné donnait, lui aussi, de très bons résultats, surtout en distance (3).

Le type des micromètres à biréfringent, et le plus ancien en date, est la lunette de Rochon, dont le principe est fort simple. Un prisme biréfringent placé en avant du plan focal (*fig.* 5) sépare le faisceau;

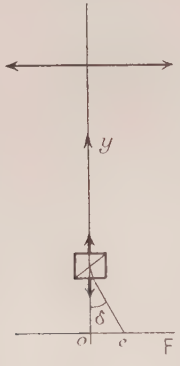

Fig. 5. — Lunette de Rochon.

les deux axes principaux divergent et vont former deux images situées très sensiblement dans un plan voisin et parallèle, et dont l'écartement

(1) *M. N.*, t. 92, 1932, p. 72.
(2) *M. N.*, t. 98, 1938, p. 176.
(3) La mesure de l'angle par *comparaison* paraît moins avantageuse.

varie proportionnellement aux déplacements du prisme le long de l'axe. Sous cette forme à laquelle Rochon s'était arrêté après divers essais (1), l'appareil présentait encore plusieurs défauts, deux surtout. Tout d'abord, les images étaient altérées par le prisme, et cela d'autant plus qu'on l'écartait davantage du plan focal; les aberrations devaient évidemment croître avec la distance de la pièce qui les causait, et aussi avec la section du faisceau intercepté. D'autre part, si l'on pouvait écarter les images largement dans un sens, on était rapidement arrêté dans l'autre par l'oculaire; il était généralement impossible d'effectuer les pointés symétriquement pour éliminer le zéro (lecture de coïncidence des images). Or, l'emploi de cette *constante* se heurte à des objections diverses, la plus grave, inconnue de Rochon comme de ses successeurs, étant constituée justement par l'effet micrométrique qui fera l'objet du chapitre suivant.

Arago avait cherché à améliorer le dispositif de Rochon, notamment en reportant le biréfringent en arrière de l'oculaire; la séparation angulaire obtenue sur l'image focale est alors le quotient du dédoublement propre du prisme par le grossissement. Il faut donc connaître ce dernier et la mesure ne peut se faire que :

1° soit en agissant sur le grossissement, par l'usage d'un oculaire à lentilles mobiles;

2° soit en disposant de tout un jeu de petits prismes biréfringents.

Ce sont les deux solutions d'Arago. Or, l'une au moins des deux quantités qui interviennent est mal déterminée; en effet, le dédoublement angulaire d'un biréfringent varie notablement avec l'incidence et au cours des observations, le champ d'un oculaire étant de plusieurs dizaines de degrés, cette dernière prendra toutes les valeurs possibles dans un intervalle d'au moins 5 degrés. Dans la seconde solution d'Arago, cette difficulté est multipliée par le nombre des prismes nécessaires, qui est considérable si l'on veut pouvoir encadrer toute distance cherchée entre deux limites suffisamment voisines.

On conçoit donc que ces dispositifs, ingénieux quant à l'amélioration des images, n'aient pu devenir des appareils d'usage courant.

Les micromètres à double image à biréfringent ont certainement souffert des jugements portés, par une extension regrettable, sur la méthode elle-même d'après des résultats presque tous obtenus avec des micromètres à lentilles sciées. Il est certain, par exemple; que les micro-

---

(1) Notamment l'usage de deux prismes de petit angle en verre ordinaire dont l'un tournait sur l'autre. C'est sur une de ces premières formes seulement qu'il y eut controverse de priorité entre Rochon et l'astronome serbe Boscovich (*voir* l'*Histoire de l'Astronomie au* XVII^e *siècle*, de DELAMBRE, p. 645); ce dernier faisait coulisser dans la lunette un prisme en verre, mais c'est bien Rochon qui, le premier, songea au biréfringent.

mètres à double image donnent des diamètres systématiquement plus petits que le micromètre à fils. Il reste à établir laquelle des deux méthodes approche le plus de la réalité, car il y a précisément plusieurs raisons d'attendre du micromètre à fils des erreurs par excès dans le cas des diamètres (1).

La méthode de mesure par double image méritait, en tous cas, d'être appliquée dans des conditions meilleures que celles des essais antérieurs.

CHAPITRE III.

PRINCIPE DE DESCRIPTION DE L'APPAREIL.

1. **Le phénomène fondamental.** — Le nouveau micromètre utilise le principe de la double image dans des conditions particulièrement propres à faire profiter de tous les avantages de la méthode.

Le montage est celui de la lunette de Rochon; mais les variations de la distance des deux images sont obtenues par un procédé différent et même, à première vue, assez inattendu : le déplacement du prisme biréfringent a lieu, en effet, dans une direction normale à l'axe optique et non plus le long de cet axe (*fig.* 6). L'expérience montre, et la théorie

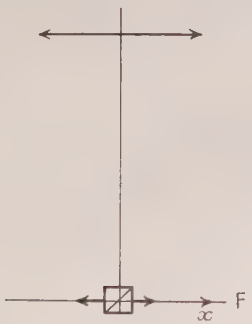

Fig. 6. — Le nouveau micromètre.

le confirme avec toutes les précisions quantitatives nécessaires, que la distance des images varie encore proportionnellement aux déplacements

(1) Ne donnons pour exemple que le mémoire de W. Rabe (*A. N.*, t. 234, 158) sur les diamètres des grosses planètes. On remarquera : *a*. que les diamètres trouvés aux grands réfracteurs, de même que ceux des planètes inférieures observées de jour ou lors de leurs passages sur le Soleil, sont plus près des résultats obtenus par double image que des autres. Les mesures de Wirtz à Strasbourg, que Rabe est tenté de rejeter, sont absolument confirmées par celles, alors inédites, effectuées en 1928 au même instrument (Équatorial de 49^{cm}) par MM. Danjon, Rougier et Couder; *b*. que

du prisme, avec un coefficient γ petit et de même ordre de grandeur que dans le procédé Rochon; γ représente le taux de l'effet micrométrique. Mais ici plusieurs objections faites au micromètre de Rochon tombent, et l'on améliore enfin l'instrument par l'emploi d'un prisme nouveau.

Le phénomène sera étudié plus loin en détail et dans les cas les plus divers; bornons-nous ici à le décrire pour faire saisir le principe de la méthode.

Soulignons d'abord que l'effet utilisé est linéaire et non plus angulaire comme le dédoublement jusqu'alors considéré pour seule caractéristique d'un biréfringent. Les deux phénomènes sont même indépendants géométriquement, à telle enseigne que l'on peut (comme nous le ferons plus loin) concevoir des biréfringents qui ne présentent qu'un seul des effets. Ils sont propres à ces prismes; une lame de cristal anisotrope est dépourvue de dédoublement angulaire et d'effet micrométrique. Il y a bien alors un dédoublement linéaire, mais il reste évidemment constant dans toute translation de la lame (1).

La cause déterminante de l'effet micrométrique est la déviation inégale des deux rayons à la traversée du plan de coupe, les deux autres réfractions n'intervenant pas directement. Considérons (*fig.* 7) un biréfringent

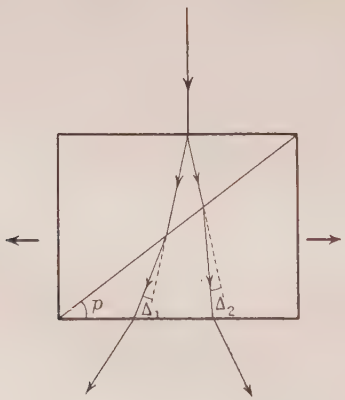

Fig. 7. — Cause de l'effet micrométrique.

quelconque, astreint à la seule condition de ne transmettre que deux rayons. Soient Δ_1 et Δ_2 les déviations subies par ces rayons au passage

---

les résultats par double image proviennent tous, sauf un (micromètre de Wellmann, appareil combiné à biréfringent et à fils) d'appareils à lentilles sciées : héliomètres ou micromètres d'Airy.

L'accord obtenu entre les résultats des deux méthodes, pour certaines planètes, au moyen de corrections plus ou moins empiriques est loin d'être convaincant.

(1) On peut toutefois (M. Lyot) utiliser une *rotation* de la lame.

d'un milieu dans l'autre, supposées petites; nous montrerons que le taux de l'effet micrométrique est sensiblement égal à

$$\gamma = (\Delta_2 - \Delta_1)\, \mathrm{tg}\, p,$$

où p désigne l'angle de coupe; γ ne dépend donc pas directement de la marche ultérieure des rayons, c'est-à-dire du dédoublement angulaire δ. Remarquons encore que ce dernier, au contraire de γ, se déduit de la marche des ondes et non de celle des rayons. S'il y a relation entre ces deux constantes, c'est parce qu'elles s'expriment en fonction des mêmes quantités; constantes optiques du cristal et paramètres de forme (angle de coupe et position des axes) du prisme. Les constantes d'un Rochon ou d'un Wollaston ne dépendent plus que d'un paramètre, l'angle de coupe; mais on peut considérer des formes plus générales, à deux ou même trois paramètres, et imposer des conditions à leurs constantes. On trouvera dans la seconde partie du présent travail le développement de cette étude. Dans l'ensemble et particulièrement pour les formes usuelles, γ et δ augmentent avec l'angle de coupe.

Ceci dit, comment se manifeste l'effet micrométrique ? Tous les objets visibles dans le champ sont dédoublés, mais pas de la même quantité comme dans un système à miroirs ou à prismes (télémètre par exemple). La transformation qui fait passer d'une image à l'autre est une multiplication des distances à une certaine droite D, liée au prisme et perpendiculaire à sa section principale, par un certain coefficient fixe et voisin de 1 égal à

$$k = 1 + \gamma.$$

Il y a une légère dilatation ou contraction des distances à D (1), de sorte que l'on observe (*fig.* 8) :

1° tout le long de D coïncidence des images;

2° en tout autre point du champ, dédoublement linéaire croissant à mesure que l'on s'écarte de D.

Réciproquement, si l'on observe en un point déterminé du champ, une étoile par exemple, et que l'on imprime au prisme une translation dans une direction différente de celle de D, soit D', on verra la seconde image de cette étoile s'écarter ou se rapprocher d'elle de quantités

---

(1) On aperçoit déjà que les deux images d'un couple AB ne seront pas, en général, identiques; la différence est certes insensible à l'œil, mais elle nécessite une correction. Soulignons que l'effet Rochon n'est pas plus simple quoi qu'en aient pensé ce dernier et, sans aucun doute, ses successeurs (notamment Arago). Le dédoublement angulaire attribué à un biréfringent ne vaut que pour l'incidence normale, de sorte qu'il se produit entre deux étoiles ou les deux bords d'un disque un effet différentiel absolument analogue à celui que nous décrivons ici. Nous reviendrons plus loin sur l'observation exacte des deux effets.

proportionnelles aux déplacements du prisme dans un rapport égal à $\gamma \sin \theta$. C'est l'effet micrométrique, qui est naturellement maximum quand le déplacement a lieu perpendiculairement à D ; il est bon toutefois de souligner que la direction du dédoublement, qui est celle du déplacement relatif des images, est liée à l'orientation du prisme, mais non pas à la direction de sa translation. Si cette dernière n'est pas parallèle à la section principale, seul le rapport entre la variation de l'écartement des images et les déplacements du prisme se trouve modifié et devient $\gamma \sin \theta$.

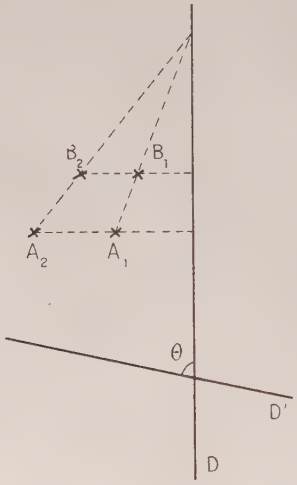

Fig. 8. — L'effet micrométrique.

La valeur absolue de γ n'excède pas habituellement 0,03. Quand le prisme se déplace de Δx, la distance des images varie de Δd et l'on a (*fig.* 6)

$$\Delta d = \gamma \, \Delta x,$$

alors que, dans la lunette de Rochon, on avait (*fig.* 5)

$$\Delta d = \delta \, \Delta y,$$

où le dédoublement δ est celui d'un Rochon de 45°, soit

$$\delta = 31',3 = 0,0091$$

Or, le même prisme a pour seconde constante

$$\gamma = 0,0059.$$

On conserve donc un avantage propre à l'ancien dispositif : l'amplification considérable des petites longueurs mesurées, qui rend inutile

l'emploi d'une vis micrométrique de haute précision. En outre, les mesures portent non plus sur une fraction de tour, mais sur 5 ou 10 tours et davantage; ce qui permet de réduire la lecture du tambour au centième, toujours marqué, opération commode et rapide.

Tout en conservant cette propriété précieuse, on voit de plus disparaître plusieurs inconvénients du procédé Rochon :

1° Le prisme intercepte une section constante du faisceau issu de l'objectif, de sorte qu'il imprime aux images des aberrations moindres, et moins largement variables avec ses déplacements. Comme sa distance à l'objectif est constante, on peut choisir un tirage optimum; en particulier, on réduira le faisceau intercepté à un mince pinceau en plaçant le prisme aux environs du foyer.

2° Il devient possible d'effectuer les mesures symétriquement par rapport à la coïncidence, dans tous les cas et non plus seulement pour les écartements inférieurs à une certaine limite (1). En effet, toute modification du tirage s'accompagne d'un effet Rochon faisant varier la lecture de coïncidence; on peut donc choisir le tirage qui amène le zéro à mi-course. D'ailleurs, il est non seulement utile, mais indispensable d'éliminer cette lecture par des mesures symétriques puisqu'en raison de l'effet micrométrique elle varie avec le point du champ où l'on observe.

3° Enfin, il est inutile de construire un appareil spécial muni de glissières et d'une vis parallèles à l'axe de la lunette et des organes de lecture correspondants, comme l'exige le procédé de Rochon. Il suffit de fixer le biréfringent au milieu du cadre mobile d'un micromètre à fils, à la place de ceux-ci, pour le transformer en micromètre à double image. Quelques modifications de détail seront nécessaires dont nous parlerons plus loin.

L'appareil ainsi obtenu donne de très bons résultats; la qualité des images dépend surtout du genre du biréfringent utilisé. C'est ici que l'on peut réaliser un progrès décisif en substituant au Rochon ou au Wollaston, seuls types courants, un prisme nouveau conçu en vue de cet usage.

2. **Le nouveau biréfringent.** — Le dédoublement angulaire, indispensable au fonctionnement de la lunette de Rochon, constitue ici une gêne pour plusieurs raisons.

La première est l'obligation d'adopter un certain tirage pour amener la coïncidence des images à mi-course du prisme; en effet, ce tirage peut être fort différent de celui qui donne les moindres aberrations. Même si la position du prisme réalise un compromis entre les deux conditions

---

(1) *Voir* p. 8.

précédentes, on constate que les aberrations restent notables, qu'elles varient avec ses déplacements, et qu'en général les meilleurs prismes, à ce point de vue sont ceux de moindre dédoublement angulaire.

En outre, le cercle oculaire est dédoublé et la portion commune, où il faut placer la pupille de l'œil pour observer, est d'autant plus petite que δ augmente.

Malheureusement, *dans le cas des prismes courants de Rochon et de Wollaston*, on ne peut réduire δ qu'en adoptant des biréfringents de petit angle; or, la constante γ décroît avec p plus vite encore que δ (γ et δ variant respectivement comme $\operatorname{tg}^2 p$ et $\operatorname{tg} p$) et les valeurs de γ sont déjà à peine suffisantes puisque la course du prisme, considérable dans le procédé de Rochon, est ici limitée par ses dimensions. Le calcul montre qu'il faut consentir à des dédoublements de l'ordre du degré pour que la distance maximum mesurable atteigne une vingtaine de fois le pouvoir séparateur de l'objectif, ceci avec un prisme de 2 à 3^{cm} de côté.

En définitive, le dédoublement angulaire se révèle donc plus nuisible qu'utile. C'est pourquoi on a cherché une forme de biréfringent nouvelle où il soit nul, mais qui ait cependant une constante γ suffisante. Un raisonnement simple, sans aucun calcul, sur la marche d'une onde incidente parallèle à la face d'entrée montre que tout biréfringent où les axes dans les deux demi-prismes sont à la fois :

1° contenus dans le plan de la section principale;
2° symétriques par rapport aux faces d'entrée et de sortie du biréfringent,

est doué entre autres des propriétés suivantes :

a. son dédoublement angulaire est nul;
b. les rayons se propagent comme le montre la figure 9; le rayon ordinaire traverse l'ensemble sans déviation, l'extraordinaire est dévié successivement de $-\alpha$, $+\alpha$ et o par rapport au rayon incident normal.

Un calcul simple, que nous ferons plus loin sous sa forme la plus générale, fournit l'expression de la constante γ en fonction de p et de l'angle α. Ce dernier ne dépend que de l'inclinaison commune φ des axes sur les faces du prisme, non de l'angle de coupe p. Sa valeur approchée est

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{n} \sin 2\varphi \qquad \text{avec} \quad \varepsilon = n_e - n_o \quad \text{et} \quad n = n_o,$$

et l'on a

$$\gamma = 2\alpha \operatorname{tg} p = 2\frac{\varepsilon}{n} \operatorname{tg} p \sin 2\varphi.$$

La figure montre pourquoi la distance des images est variable dans la translation du prisme (trajets 1 et 2) bien que les deux rayons moyens, seuls représentés, des faisceaux correspondants émergent parallèles.

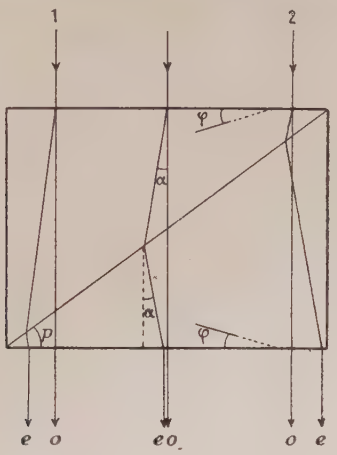

Fig. 9. — Position des axes et marche des rayons dans un prisme à dédoublement angulaire nul.

On a choisi la plus simple des formes ainsi définies en adoptant un angle de coupe de 45° et en prenant les axes perpendiculaires entre eux, donc respectivement parallèle et normal au plan de coupe (*fig.* 10). On a, par conséquent,

$$\varphi = 45^\circ,$$

valeur à choisir, d'ailleurs, quel que soit p, car elle donne à la constante γ sa valeur maximum.

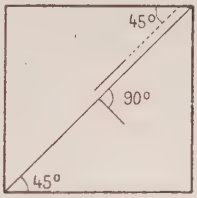

Fig. 10. — Prisme de Muller.

Cette valeur s'écrit, en tenant compte cette fois d'un second terme (p. 57) qui était nul dans les prismes considérés jusqu'ici :

$$\gamma = 2\frac{\varepsilon}{n}\operatorname{tg} p\left(1 + \frac{\varepsilon}{n}\operatorname{tg} p\right).$$

Le prisme représenté figure 10 a donc pour grandissement g, inverse de γ :

$$g = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\varepsilon} - 1\right) = 84{,}0 \text{ (cas du quartz).}$$

A forme égale, c'est sensiblement (au terme correctif près) celui d'un Wollaston et la moitié de celui d'un Rochon. Mais les images sont meilleures; l'image ordinaire est parfaite, le prisme se comportant pour les rayons ordinaires comme une lame isotrope; l'image extraordinaire reste légèrement astigmatique, mais on peut choisir ici un tirage optimum puisque la coïncidence, ainsi que le montre la propagation des deux rayons, se produit toujours à mi-course. Nous ferons plus loin le calcul de cette propagation, notamment au point de vue de la formation des images; l'expérience prouve que ce prisme donne deux images pratiquement indiscernables, même sous les grossissements élevés que demandent les mesures micrométriques.

La méthode de mesure par double image, appliquée dans ces conditions, doit donc comporter tous les avantages que des considérations théoriques en faisaient attendre; les résultats marquent, en effet, une amélioration notable par rapport à ceux des méthodes ordinaires.

3. **Description de l'appareil.** — A. *Organes essentiels.* — La façon de procéder la plus simple est de prendre un micromètre à fils, de supprimer ces derniers ainsi que le cadre qui portait les fils fixes, et d'installer le prisme sur le chariot des fils mobiles. On l'orientera de façon que le plan de la section principale soit parallèle à l'axe optique et à la vis micrométrique (*fig.* 11). La première condition vise à obtenir

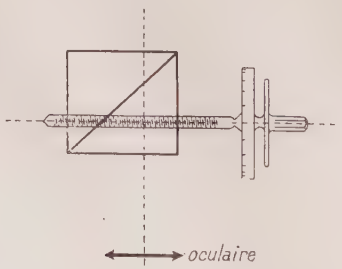

Fig. 11. — Position du prisme.

que les images passent par une coïncidence aussi exacte que possible; en fait, il faudra toujours considérer que l'une peut passer légèrement au-dessus de l'autre. L'erreur, quand elle existe, n'est sensible qu'en angle de position et la méthode de mesure l'élimine entièrement. Quant à la seconde condition, on sait (p. 12) qu'elle n'a pas un caractère absolu.

Il peut arriver encore que la face d'entrée ne soit pas normale à l'axe optique; le prisme ne fonctionne pas sous incidence normale. Le phénomène reste linéaire, avec un coefficient légèrement différent. Ce qui importe donc pour ici, comme d'ailleurs pour la seconde condition, c'est beaucoup moins l'existence d'une petite erreur que sa constance, d'où l'avantage d'utiliser une boîte de micromètre qui assure un bon guidage des déplacements du prisme.

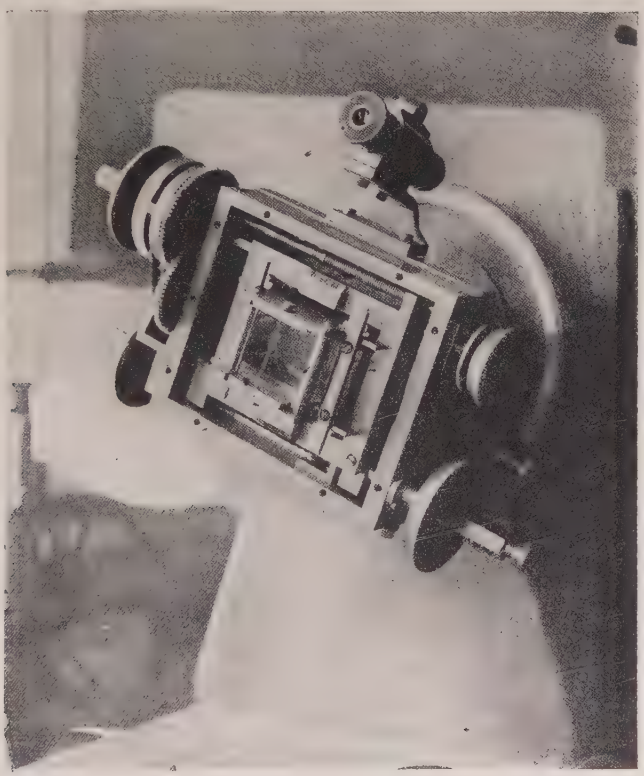

Fig. 12. — Le micromètre, ouvert, montrant la fixation du prisme sur le chariot des fils mobiles. *Au-dessus*, le viseur du cercle de position; *à gauche et en haut*, le tambour des centièmes et le compte-tours de la vis micrométrique.

On placera donc ce dernier de façon que les faces d'entrée et de sortie soient situées de part et d'autre du plan où se trouvaient les fils; on y sera d'ailleurs amené pour utiliser au mieux la profondeur de la boîte. Une sorte de cage fixée au cadre mobile contiendra le prisme (*fig.* 12). Il faut assurer la position de ce dernier sans jeu, par l'appui sous une compression modérée des faces d'entrée et de sortie, de préférence au seul serrage latéral; cette dernière fixation, normale pour un petit prisme

rectangle par exemple, risquerait ici d'exercer des efforts sur le collage du biréfringent. Il est à noter que l'on peut empiéter largement sur les faces du prisme, dont seule une bande étroite sera utilisée.

Quel prisme faut-il prendre ? On n'aura, sous la main, généralement que des prismes de Rochon ou de Wollaston, dont la forme carrée représentera une bonne moyenne; on trouvera plus loin les indications nécessaires à leur emploi.

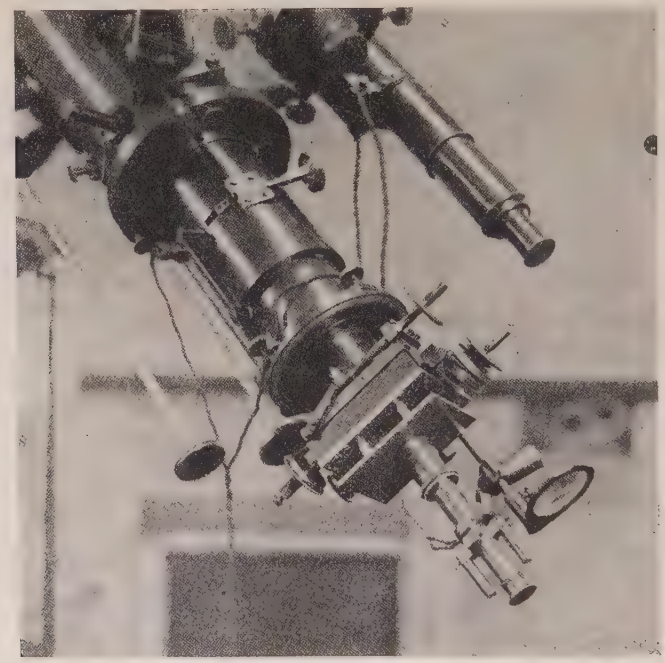

Fig. 13. — Le nouveau micromètre en place à l'équatorial de 162^{mm}. On voit : le microscope avec les deux manchons disposés en U qui reçoivent l'analyseur et le cercle divisé pour les mesures photométriques (*fig.* 14) le coulant du microscope, vissé dans un intermédiaire plus large pour ménager la place de l'objectif; la tige, qui porte une large loupe de lecture des tambours, orientable suivant la position du micromètre et une lampe, éclairant à la fois les tambours et le cercle de position; le cadre et les colonnettes, qui augmentent les dimensions intérieures de la boîte où circule le prisme.

En arrière du prisme, il faudra apporter quelques modifications au micromètre. La boîte ne sera pas, en général, assez profonde; on enlèvera donc le couvercle pour le remettre après avoir interposé un cadre épais ou des colonnettes. D'autre part, l'image focale est dans le prisme et l'on ne pourra pas l'approcher assez pour mettre au point un oculaire ordinaire. On remplacera donc ce dernier par un microscope à faible grandissement (trois à quatre au plus), de façon à avoir une distance frontale

suffisante sans encombrement excessif à l'arrière. Dans le plan-image de ce microscope, on disposera le fil fixe, qui reste nécessaire pour déterminer la lecture du mouvement diurne; cet usage du fil est d'ailleurs avantageux, car il est vu sous un grossissement moindre que l'image stellaire. On l'orientera parallèlement au dédoublement, donc à la vis, et il sera porté par une platine susceptible de recevoir une petite rotation.

Les autres organes : cercle, tambours, éclairage, etc. peuvent être conservés.

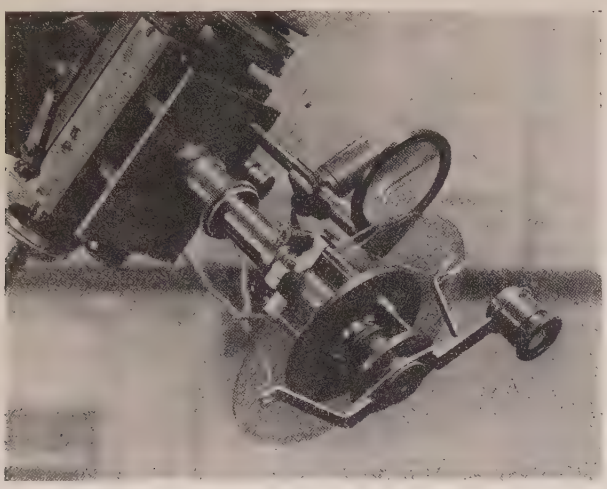

Fig. 14. — L'appareil muni du dispositif photométrique. L'analyseur est en arrière de l'oculaire, que vient toucher sa bonnette de protection avant. On voit dépasser à la base des manchons les extrémités des tiges de fixation. Le cercle est un rapporteur maintenu entre deux disques qui l'empêchent de se déformer; sa division est en grades, ce qui simplifie la réduction des mesures.

B. *Réglage.* — Il s'agit de choisir le plan de visée du microscope dans le prisme; c'est une opération analogue au premier temps d'une mise au foyer ordinaire, où l'on met au point sur les fils. Dans les deux cas, le second temps consistera à mettre au point sur le ciel par un déplacement d'ensemble. Dans le cas du micromètre à fils, le moindre écart entre le plan des fils et le plan focal entraîne un effet de parallaxe sensible; il est évident que le problème est ici d'une nature différente : il s'agit simplement, pour que le prisme soit totalement utilisé, et aussi parce que cela semble donner le moins d'aberrations, d'amener la coïncidence des images au milieu de la course disponible. Or, avec un Rochon ou un Wollaston, il est facile de voir qu'il y a coïncidence au moment où l'on est au point sur le plan de coupe; il n'est donc pas nécessaire d'opérer sur le ciel et d'observer des images.

L'opération comporte deux temps : placer le prisme à mi-course, mettre le microscope au point sur le plan de coupe. On commencera par déterminer les limites de la course disponible, en lisant le tambour divisé au moment où le cadre mobile vient, de chaque côté, buter contre la paroi intérieure de la boîte. Si les dimensions du prisme sont inférieures à cette course, on lira le tambour, au contraire, pour l'arrivée de ses deux bords dans le champ du microscope. Ayant obtenu, dans l'un ou l'autre cas, les lectures extrêmes, on agit sur la vis jusqu'à faire marquer leur moyenne : le prisme se trouvera alors à mi-course. Il reste à mettre au point sur le plan de coupe en observant les poussières ou autres détails visibles sur le collage ou sur les faces en contact; on reconnaîtra sans peine son image au fait que la mise au point est détruite au moindre déplacement du prisme. On peut dégrossir ce réglage et éviter des tâtonnements, parfois dangereux pour la face arrière du prisme, en mettant successivement au point les faces de sortie (vue simple) et d'entrée (vue double), puis en adoptant un tirage moyen. Il est bon de disposer d'une distance frontale, dans l'air, de l'ordre de l'épaisseur du biréfringent.

A la première observation, on achèvera la mise au foyer en déplaçant l'ensemble du micromètre. Ce réglage n'a aucun besoin d'être précis, ni invariable; rien ne s'oppose donc à ce qu'on termine toujours la mise au point sur les étoiles à l'aide du microscope seul.

Dans le cas de mon prisme, ce réglage est inutile et d'ailleurs inopérant en ce qui concerne la coïncidence; cependant, comme il assure de bonnes images et qu'il fait apparaître les petits défauts du plan de coupe dans la seule position où précisément on ne fera jamais de pointés, il y a un avantage certain à rechercher une disposition voisine.

C. *Usage photométrique. Compensateur.* — Deux organes supplémentaires seront utiles si l'on veut tirer de l'instrument tout le parti possible.

Le premier est un analyseur tournant, placé à la suite de l'oculaire et qui permet de mesurer les couples à composantes très inégales par des méthodes particulières, en égalisant deux images sur les quatre.

Si, en outre, la rotation de l'analyseur est repérée sur un cercle divisé, on aura un excellent photomètre de Pickering pour étoiles doubles [1]; rappelons que l'emploi de mon prisme entraîne, à ce point de vue, l'avantage nouveau que le cercle oculaire n'est pas dédoublé. L'ensemble analyseur-cercle divisé devra être amovible, les couples inégaux étant relativement rares et les plus serrés se mesurant comme les couples égaux. L'analyseur n'est utile que pour une étoile sur huit ou dix à peine.

---

[1] Ce dispositif vient d'être amélioré en remplaçant le nicol par une lame de polaroïd, placée *devant* le microscope oculaire et en faisant tourner le cercle avec l'analyseur, de façon à lire par rapport à un index fixe (janvier 1947).

Le deuxième organe est un prisme compensateur dont la raison d'être est l'existence de l'effet micrométrique différentiel. La déformation de l'image extraordinaire qui en résulte est minime et l'on verra que la correction d'échelle correspondante est tout à fait sûre. Mais cet effet exige aussi un entraînement fidèle de la lunette, puisqu'il fait varier la séparation des images avec le point du champ où se trouve l'étoile. Il existe un moyen simple de supprimer les deux phénomènes, qui est l'adjonction du prisme compensateur.

Supposons par exemple que nous utilisions le nouveau prisme et faisons-le suivre d'un prisme semblable, mais retourné et de dimensions quelconques (*fig.* 15). En passant d'un prisme dans l'autre, le rayon

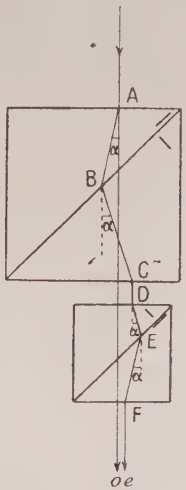

Fig. 15. — Rôle du prisme compensateur.

extraordinaire ne change pas de nom; de ce fait, et des propriétés du prisme, il résulte que les deux rayons se propagent comme le montre la figure. La distance à l'émergence finale est égale à la projection du contour ABCDEF sur la face de sortie, soit

$$d = [(BC + DE) - (AB + EF)] \sin \alpha.$$

Or, les sommes entre parenthèses ne changent pas si le point A se déplace sur la face d'entrée, puisque les plans de coupe d'une part, les quatre faces traversées d'autre part, sont parallèles. Les variations de la distance en C sont donc compensées exactement par le deuxième prisme et la distance observée en F est constante. Mais on conserve un effet micrométrique si on laisse fixe le prisme compensateur. La distance des images dépend alors uniquement de la position relative des deux prismes, donc de la lecture faite sur le tambour de la vis; en particulier,

la lecture de coïncidence devient une constante absolue et non plus relative au point du champ où l'on observe.

La compensation est encore possible en principe dans le cas du Rochon ou du Wollaston, mais elle rejette la coïncidence très loin du milieu de la course, voire à l'extérieur et il faut y renoncer.

On remarquera que le prisme compensateur étant fixe peut être pris très petit; il y a toujours intérêt d'ailleurs à réduire à un minimum l'épaisseur de cristal traversée : d'abord en raison de la distance frontale limitée du microscope oculaire, ensuite parce que cette épaisseur intervient en facteur dans les aberrations.

Si l'on manque de place en arrière du biréfringent, on obtiendra le même résultat en reportant le compensateur en avant (1).

4. **Constantes : formules, ordre de grandeur.** — Soit un micromètre à fils dont la révolution de la vis, en secondes d'arc par exemple, soit T; en remplaçant le fil mobile par un biréfringent de grandissement g, on introduit un nouveau tour de vis

$$T_0 = \frac{T}{g} = \gamma T$$

dont la signification exacte est la suivante : pour un déplacement d'un tour de la vis, la distance des deux images d'une étoile varie de T_0. Le grandissement s'exprime en fonction de l'angle de coupe, dans les trois cas à considérer, par les formules suivantes :

$$\text{Prisme de Rochon :} \quad g = \frac{n}{\varepsilon}\cot^2 p,$$

$$\text{» Wollaston :} \quad g = \frac{1}{2}\frac{n}{\varepsilon}\cot^2 p,$$

$$\text{» Muller :} \quad g = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\varepsilon}\cot p - 1\right),$$

où la constante $\frac{n}{\varepsilon}$ inverse de la biréfringence relative, a pour valeur numérique dans le cas du quartz et pour la longueur d'onde $\lambda = 0^{\mu},575$:

$$\frac{n}{\varepsilon} = 169,0.$$

Elle varie assez peu avec λ : environ 2,4 pour $0^{\mu},1$. Par contre, le grandissement ainsi défini ne vaut que pour l'incidence normale; il faudra s'en souvenir à propos de l'étalonnage.

---

(1) Au moment où les événements m'ont arrêté pour sept ans dans les observations, je venais de commander deux petits prismes de 8^{mm} de côté seulement, qui devaient servir de compensateurs. C'est dire, du reste, que les mesures sont possibles sans cet artifice lorsqu'on dispose d'un entraînement excellent.

Dans le choix du meilleur prisme, on est pris entre deux difficultés : les prismes de petit angle donnent de bonnes images, mais leur grandissement élevé réduit la course disponible; ceux de grand angle ont une course suffisante, mais altèrent les images. Il y a toutefois une large zone de solutions satisfaisantes, dont le juste milieu, parmi les formes classiques, semble être le Wollaston de 45° ($g = 84{,}5$); mais le mieux sera d'adopter celle constituée par le nouveau prisme, qui, pour un grandissement voisin ($g = 84$) donne de bien meilleures images et possède tous les avantages du dédoublement angulaire nul. Mes appréciations reposent sur des essais avec un Rochon de 45° et des Wollaston de 45, 55 et 61°, donc avec des grandissements de 169 à 25.

La course totale dépend de la dimension l du prisme dans le sens de la vis, de son grandissement g et de la distance focale f de la lunette Elle a pour valeur

$$C = 206265'' \frac{l}{fg}.$$

Voici un tableau donnant l'ordre de grandeur de C pour $g = 85$ et pour quelques valeurs usuelles de l et f :

l \ f	2m.	4m.	6m.	8m.	10m.	12m.
mm						
15.....	18",2	9",1	6",1	4",5	3",6	3",0
20.....	24,3	12,1	8,1	6,1	4,9	4,0
25.....	30,3	15,2	10,1	7,6	6,1	5,0
30.....	36,4	18,2	12,2	9,1	7,3	6,1
35.....	42,5	21,2	14,2	10,6	8,5	7,1

Les méthodes par double image limitent les mesures à C pour les distances, à $\frac{C}{2}$ pour les diamètres; on voit que, même avec un grandissement de 85 seulement, la course est petite. Mais, suivant l'instrument employé, on s'intéressera à des couples plus ou moins serrés; et dans cet ordre d'idées, l'expression de C signifie qu'avec un prisme de l^{mm} et un objectif ouvert à $f/15$, quel que soit le diamètre de ce dernier, on pourra mesurer des distances valant un peu plus de l fois le pouvoir séparateur. Le même prisme, ou le même micromètre interchangeable, sera donc également bien utilisé quelle que soit l'ouverture de l'instrument.

5. **Méthodes de mesure.** — Dans ce qui suit, je supposerai d'abord que l'on utilise le nouveau prisme avec son compensateur, cas le plus simple (1); j'indiquerai ensuite la correction d'échelle à apporter dans les autres cas.

---

(1) Le compensateur peut être placé en avant ou en arrière du prisme principal. Dans les deux cas, la déformation relative des deux images se trouve supprimée et

Observons une étoile double, et soit Δ la direction du dédoublement. L'image ordinaire A_1B_1 occupe exactement la place où l'on verrait l'image en l'absence du biréfringent; l'extraordinaire A_2B_2 s'en déduit par une translation parallèle à Δ et de longueur

$$A_1A_2 = B_1B_2 = (L - L_0)T_0,$$

L, lecture actuelle, L_0 lecture de coïncidence.

On lit donc sur le tambour les écartements, ou tout au moins (si l'on ne veut pas utiliser la lecture du zéro) leurs variations.

Les mesures de l'angle de position et de la distance se feront suivant les méthodes classiques, que nous avons exposées en détail au Chapitre I de cette Première Partie (p. 4). Nous y reviendrons à propos des résultats, tant d'observation que de laboratoire. Mais l'emploi de l'analyseur permet, dans le cas de couples à forte différence d'éclat, d'en utiliser d'autres, entièrement nouvelles, que nous schématisons dans le Tableau de la figure 16.

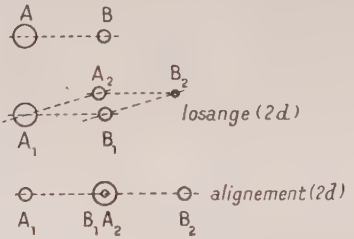

Fig. 16. — Méthodes de mesure de la distance avec analyseur.

Deux méthodes s'offrent pour la mesure de la distance. La première dérive de celle du losange, mais s'en distingue par le fait que la quatrième image sera généralement imperceptible; en effet, si la différence de magnitude des composantes est Δm, il y a entre l'image brillante et l'image faible qui lui est opposée, les deux autres étant égalisées, une différence $2\,\Delta m$. On observe donc plutôt un triangle isoscèle qu'un losange; la distinction n'est pas indifférente, la méthode du losange comportant une erreur propre sensible (1), qui semble moins à craindre avec trois images seulement.

---

l'écartement des deux images d'une étoile est indépendant du point du champ où elle se trouve. Mais la correction que nous avions apportée au tour de vis pour tenir compte de la déformation n'est annulée que si le compensateur *précède* le prisme principal; le tour de vis est alors T_0. Si, au contraire, le compensateur *suit* l'autre prisme, il reçoit les faisceaux déjà séparés par ce dernier et dont la séparation varie avec ses déplacements. Ces variations sont restituées à la sortie du compensateur avec un coefficient $1 - \gamma$, puisqu'il provoque un effet micrométrique de sens opposé à celui du gros prisme. Il en résulte que, dans ce second cas, le tour de vis devient $T_0(1-\gamma)$.

(1) *Voir* partie expérimentale.

La seconde méthode, de même, ne doit pas être confondue avec celle (non envisagée) qui consisterait, dans le cas de composantes égales ou peu différentes, à réduire l'ensemble à trois images équidistantes par coïncidence de deux d'entre elles au centre. La disposition est bien la même, mais tout autre le jugement demandé à l'œil : dans ce dernier cas, les déplacements du prisme ne feraient qu'allonger l'image centrale sans détruire la symétrie de l'aspect d'ensemble; phénomène peu sensible. Au contraire, si les composantes sont très différentes et qu'on emploie l'analyseur, ces déplacements ne produiront aucun changement d'aspect au centre, où la quatrième image est confondue avec la plus brillante, sans apparaître au cours du pointé parce qu'elle est beaucoup plus faible. L'étoile centrale semble flanquée de deux compagnons plus faibles, rendus égaux à l'aide de l'analyseur, dont l'un est fixe tandis que l'autre peut être amené dans une position symétrique; c'est ce pointé qui constitue la nouvelle méthode.

Dans ces deux méthodes nouvelles, le passage de l'autre côté de la coïncidence pour effectuer le pointé symétrique doit s'accompagner d'une rotation de 90° de l'analyseur, les images qui étaient égales fournissant maintenant, au contraire, la plus brillante et la plus faible des quatre.

Passons maintenant au cas du Rochon, du Wollaston ou du nouveau prisme sans compensateur. Il n'y a rien à modifier à ce qui précède au sujet des mesures; la disposition des images est légèrement différente, mais les effets en sont insensibles à l'œil. Les mesures ne subiront qu'une correction d'échelle donnée par la théorie.

Considérons d'abord deux cas à peu près identiques, ceux du Rochon et du nouveau prisme. L'image ordinaire A_1B_1 est toujours à la place de l'image primitive AB; l'extraordinaire s'en déduit cette fois, non plus par une simple translation, mais par la déformation que nous avons définie plus haut : A_2 et B_2 se déduisent de A_1 et B_1 (*fig.* 17) par une dilatation des distances à une certaine droite D, solidaire du prisme et perpendiculaire à sa section principale, dans un rapport $1+\gamma$. Il en résulte que, dans le quatrilatère $A_1A_2B_2B_1$ seuls les côtés A_1A_2 et B_1B_2 sont encore parallèles; les images A_1B_1 et A_2B_2 du couple ne sont ni égales, ni disposées parallèlement. On montre sans peine que, si la direction AB du couple fait un angle θ avec celle du dédoublement, on a

$$B_1B_2 = A_1A_2 + \gamma A_1B_1\cos\theta,$$
$$A_2B_2 = A_1B_1(1+\gamma\cos^2\theta).$$

La mesure de l'angle restera correcte; pour les distances, on peut encore former un vrai carré, mais non le losange, ni les équidistances.

Dans la position d'alignement ($\theta = 0$), on a

$$A_1B_1 = d; \qquad A_2B_2 = d(1+\gamma) = d',$$

et j'admets que le pointé où l'œil croit former une équidistance revient à mesurer

$$\frac{1}{2}(d + d') = d\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right),$$

hypothèse la plus simple et que l'on peut justifier de plusieurs façons. On peut remarquer, par exemple, qu'il y a deux manières de rendre équidistantes (cette fois exactement) trois sur quatre des images : soit que l'on place A_2 au milieu de A_1B_1, ou B_1 au milieu de A_2B_2; ceci pour la mesure par simple distance, car on imaginera les pointés analogues pour la quadruple distance. Or, ces pointés donnent respectivement d et d', et en s'arrêtant à l'aspect moyen où la quatrième image ne vient

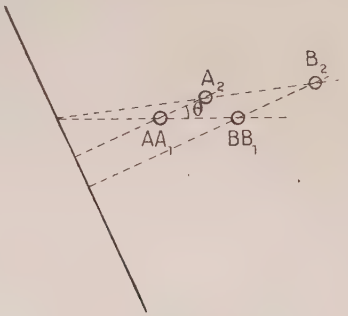

Fig. 17. — Disposition réelle des images (cas des prismes de Rochon ou de Muller).

plus (que ce soit celle de gauche ou celle de droite) frapper par sa position anormale, l'œil se trouve mesurer $\frac{1}{2}(d + d')$.

Pour obtenir d à partir des lectures, le plus simple est de faire porter la correction sur le tour de vis lui-même, en posant

$$T_1 = T_0\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right),$$

puisqu'il s'agit en définitive d'une correction d'échelle.

Comme la distance se mesure presque toujours par alignement, c'est T_1 et non T_0 qui constituera le tour de vis fondamental du micromètre.

Dans le cas du losange, la formation du triangle isoscèle revient à mesurer d par un pointé, d' par le pointé symétrique, donc leur demi-somme au lieu de d; mais la valeur de d' contient, cette fois, θ et l'on a

$$\frac{1}{2}(d + d') = d\left(1 + \frac{\gamma}{2}\cos^2\theta\right).$$

On adoptera donc un tour de vis T_2, rapporté finalement à T_1 :

$$T_2 = T_0\left(1 - \frac{\gamma}{2}\cos^2\theta\right) = T_1\left(1 + \frac{\gamma}{2}\sin^2\theta\right).$$

Ces formules supposent essentiellement que le prisme est placé comme il est indiqué dans la figure 10; le retournement face pour face ne changerait rien pour le Rochon, mais, dans le cas de mon prisme, il faudra remplacer γ par $-\gamma$. Si les axes ne sont pas repérés, on reconnaîtra la position du prisme au sens du déplacement de l'image mobile : dans la disposition de la figure, il est opposé à celui du prisme. Par contre, et ceci pour les deux types de biréfringent, le retournement de 180° autour de la normale aux faces, qui incline le plan de coupe dans l'autre sens, sans échanger les faces, ne change pas le signe de γ. En effet, il y a échange des images en même temps que renversement du mouvement de l'image mobile.

Il faut envisager aussi le cas de la mesure d'un petit disque. On montre facilement que les pointés par contact extérieur correspondent à un déplacement total de $d + d'$, où l'une des images a pour diamètre la vraie valeur d, l'autre le diamètre dilaté d', avec la déformation maximum puisqu'on mesure nécessairement des diamètres alignés. On n'aura donc qu'à appliquer aux lectures le tour de vis T_1 pour en déduire d. Dans cette mesure, la déformation n'introduit évidemment aucune ambiguïté.

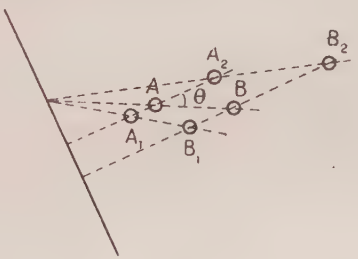

Fig. 18. — Disposition réelle des images (cas du prisme de Wollaston).

Donnons une idée de l'ordre de grandeur de la correction implicite dans le cas d'une étoile double. Avec un grandissement de 85, elle atteint 0″,01 à partir d'une distance de 1″,70; elle doit donc inspirer toute confiance.

Passons enfin au cas du Wollaston. Ni l'une, ni l'autre des imager ne se trouvent à la place de AB; elles s'en déduisent toutes deux pas une dilatation par rapport à D, mais l'une avec un coefficient $1 + \frac{\gamma}{2}$ (image extraordinaire), l'autre avec $1 - \frac{\gamma}{2}$ (*fig.* 18).

On a donc

$$A_1B_1 = d\left(1 - \frac{\gamma}{2}\cos^2\theta\right),$$

$$A_2B_2 = d\left(1 + \frac{\gamma}{2}\cos^2\theta\right).$$

Par conséquent, en admettant encore que la mesure donne la demi-somme des deux distances déformées, on trouve la vraie distance d et l'on adoptera comme tour de vis fondamental T_0 et non T_1.

Ceci dit, il faut remarquer cependant que la déformation relative des images est exactement la même que dans le cas précédent, puisque l'on a

$$\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = 1 + \gamma\cos^2\theta,$$

comme plus haut; un calcul simple montrerait que l'angle de A_2B_2 avec A_1B_1 est, lui aussi, le même dans les deux cas. La déformation par rapport à l'image primitive, au lieu de porter sur l'extraordinaire seule, est répartie par moitié et en sens opposé sur les deux images.

Terminons par une remarque commune à tous les cas où un biréfringent est utilisé seul et où il y a donc déformation. Ce phénomène impose des limites dans la recherche des faibles grandissements, qui, par ailleurs, seraient d'un grand avantage du point de vue de la course disponible. Ils s'accompagneraient en effet d'une déformation plus grande qui pourrait devenir sensible à l'œil, voire gênante dans les pointés; en outre, la correction deviendrait d'autant moins sûre en augmentant.

Si, en tout état de cause, on voulait disposer d'un grandissement inférieur à 84, il serait prudent de s'en tenir à mon prisme, pour conserver la possibilité de la compensation. Il faudrait alors lui donner un angle de coupe supérieur à 45°. Mais on peut gagner sur la course aussi en augmentant, à forme égale, les dimensions du prisme. L'expression de C contient alors la longueur l de ce dernier et son grandissement, qui peut s'écrire sensiblement

$$g = g_{45}\cot p.$$

Désignant par e l'épaisseur du prisme, on peut écrire

$$C = \frac{l}{fg} = \frac{e\cot p}{fg_{45}\cot p} = \frac{e}{fg_{45}}.$$

Avec un instrument donné, la course disponible ne dépend donc que de l'épaisseur traversée, quelle que soit la forme du prisme. Si la course du chariot est suffisante (et c'est plutôt là que l'on se trouve limité dans un micromètre à fils), il est donc aussi simple de faire tailler un prisme à 45° de dimensions plus grandes, que d'augmenter l'épaisseur seule avec p pour diminuer g.

6. **Étalonnage**. — Donnons d'abord rapidement la méthode de détermination de la lecture du mouvement diurne. On choisira, comme d'habitude, une étoile brillante, assez haute et pas trop éloignée du méridien. Puis on effectuera dans l'ordre les trois opérations suivantes :

1° amener le prisme à bout de course pour écarter au maximum les images;

2° sans toucher au micromètre, faire tourner le fil jusqu'à lui faire bissecter les deux images;

3° lunette immobile, rechercher l'orientation du micromètre pour laquelle les deux images défilent sous le fil et faire la lecture du cercle de position.

On recommencera ensuite dans la position symétrique par rapport à la coïncidence; deux ou trois pointés de chaque côté suffisent.

Le problème qui se pose maintenant est de trouver le rapport entre une distance angulaire réelle et sa mesure en tours de vis. Mais on ne peut pas, ici, appliquer la méthode ordinaire qui utilise des distances considérables; et celles qui sont accessibles (étoiles doubles proprement dites) ne sont pas actuellement mieux connues qu'à 2 ou 3 % près.

La difficulté est particulièrement sensible pour les grands instruments, où seuls sont mesurables les couples à quelques secondes d'arc. D'autre part, en raison de la variation de g avec l'incidence, l'étalonnage au laboratoire est insuffisant. Disons tout de suite que la solution la plus pratique consiste à vérifier que le prisme, lorsque le micromètre est en place, fonctionne sous incidence normale et sinon, à déterminer l'écart; le calcul donne alors une valeur du tour de vis en laquelle on peut avoir une entière confiance et que les mesures ne manqueront pas de confirmer.

1. Sous incidence normale, les valeurs de g sont données par les formules indiquées plus haut. Lorsqu'il y a lieu de considérer le tour de vis corrigé T_1 (Rochon ou Muller), on l'obtiendra directement en divisant le tour de vis valable pour les fils non plus par g, mais par

$$g\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)=g+\frac{1}{2}.$$

Dans le cas de mon prisme, la vérification de l'incidence est particulièrement facile, du fait que l'incidence normale est la direction de dédoublement angulaire nul. On peut montrer que sous une petite incidence i le dédoublement s'exprime précisément en fonction de la constante γ par

$$\delta=\gamma i.$$

On a donc un moyen simple de mesurer i. Plaçons devant l'objectif une échelle divisée, sur verre par exemple, de façon qu'un trait soit

exactement devant son centre et observons-la à travers le micromètre dépourvu de son microscope oculaire et orienté de manière à dédoubler dans la direction de la règle. La variation de δ avec i a pour effet de montrer deux images de la règle, dont l'une est dilatée dans le rapport $1 + \gamma$ autour de la direction de dédoublement nul. On doit donc voir simple le trait central et, par un effet de vernier, les 84^e, 168^e, etc. (comptés sur l'image ordinaire) de chaque côté. Si l'incidence n'est pas nulle, elle est indiquée très simplement par la position de celui des traits dont les images sont confondues : ce trait est dans la direction normale aux faces du prisme, d'où i.

La valeur de g sous l'incidence i est donnée, pour mon prisme par la formule

$$g = 84{,}0 - 1{,}9i$$

où i est compté en degrés avec le signe de la figure 19.

Fig. 19. — Signe de i.

On peut calculer les coefficients correspondants pour les autres prismes, mais la détermination de i est malaisée et le mieux est de réaliser l'incidence normale par la fixation du prisme sur son chariot, ce qui est possible avec une approximation tout à fait suffisante pour que l'on puisse adopter la valeur théorique de g; dans mon micromètre, sans que l'on ait pris aucune précaution spéciale, la vérification précédente a montré que l'incidence était normale à $3'$ près. La valeur adoptée pour g et, par suite, pour T_0, est donc exacte à $1/1\,000^e$ près.

Pour appliquer la valeur ainsi obtenue pour T_0 à la réduction des mesures, il faut supposer que ces dernières n'introduisent pas d'erreurs systématiques, physiologiques en particulier. Ceci demandait des étalonnages méthodiques, dont nous parlerons dans la III^e Partie; le résultat à retenir est que les méthodes d'alignement (simple ou quadruple distance) donnent d sans erreur, tandis que celle du losange comporte une erreur par défaut que j'ai trouvée, pour moi, très constante aux environs de 1 %. Toutefois, sur le ciel, la correction ne paraît pas toujours justifiée. Quant à la méthode du carré, elle est, soit en parfait accord, soit systématiquement en écart avec les autres, suivant l'étoile. Je l'ai donc abandonnée, d'autant plus facilement que son application n'est jamais nécessaire (la méthode $4\,d$ étant valable pour les couples les plus

serrés) (1) et qu'elle est même gênée dès que les composantes sont tant soit peu différentes.

2. On peut déterminer T_0 directement de plusieurs façons; ce sera le véritable étalonnage.

Une première méthode, qui a l'avantage de ne supposer la connaissance préalable d'aucune constante instrumentale, est la méthode des passages. On écarte au maximum les deux images d'une étoile et l'on détermine l'intervalle de temps qui sépare leurs passages sous le fil placé perpendiculairement au mouvement diurne. On recommence en amenant le prisme à l'autre bout de sa course et le calcul donne T_0 ou $T_0(1-\gamma)$ suivant le cas. Je n'insiste pas longuement sur cette méthode, parce qu'on aura généralement une course trop faible pour écarter suffisamment les images; il faut, en outre, pouvoir toper les passages sur un chronographe précis, car les intervalles de temps observés ne dépassent pas, pour des étoiles à quelques degrés du pôle, 5 à 10 secondes. Ayant opéré dans ces conditions, avec une course plutôt grande grâce à la courte distance focale de l'instrument ($1^m,85$), je ne crois pas que l'on puisse obtenir mieux que 1 à 2 % sur T_0.

On peut tenter aussi de vérifier directement T_1, et non T_0, au moyen de mesures sur les couples les plus écartés. Dans mon cas particulier, j'ai pu mesurer 11 couples entre $8'',5$ et $16''$, dont la distance a assez peu varié au cours du temps pour qu'il soit possible de l'obtenir par une moyenne étendue. Cette méthode, toutefois, ne donne de résultats qu'après plusieurs mois d'observations et demande certaines précautions dans l'utilisation des mesures antérieures pour être sûr (autant que ces dernières le permettent) que le mouvement en distance est négligeable.

On peut enfin, et c'est à mon avis la méthode la plus sûre, faire des mesures sur une mire éloignée. On prendra une règle divisée en millimètres par exemple, placée assez loin, et l'on réalisera, non des coïncidences, mais des bissections de traits; on amènera l'image mobile d'un trait donné successivement au milieu de deux intervalles de 1^{mm}, aussi écartés que possible, de l'image fixe. Pour connaître la valeur angulaire du chemin ainsi parcouru, le mieux est de mesurer, sur la même mire, une longueur plus grande avec un micromètre à fils; on s'affranchit ainsi de la correction due au tirage. Sinon, on déterminera la distance exacte de la mire, d'où la vraie valeur de l'angle mesuré et un premier tour de vis, auquel on fera subir la correction de tirage.

J'ai fait l'expérience complète en appliquant simultanément les deux méthodes. La mire était placée sur la terrasse du bâtiment équatorial,

---

(1) Des observations récentes sur des couples à la limite de résolution m'ont fait revenir, en partie, sur ce jugement. (*Voir* partie expérimentale.)

à une distance de $79^{m},60$; c'était une règle millimétrique dont j'avais vérifié la division dans la partie utilisée et sur laquelle j'ai mesuré des longueurs de :

7^{mm} avec le micromètre à double image (soit environ $27''$);
50^{mm} avec le micromètre à fils.

Toutes ces méthodes m'ont donné finalement

Valeur calculée	$0''{,}7723$
Passages	0,776
Étoiles écartées	0,772
Mire par la distance	0,7713
Mire par le micromètre à fils	0,7733

Il en résulte évidemment qu'il n'y a aucune raison de ne pas adopter la valeur calculée, que j'arrondis à $0'',772$.

L'étalonnage le plus correct consistera toujours à mesurer des étoiles doubles dont la distance puisse être considérée comme connue. Le manque évident d'une telle échelle naturelle m'a amené à proposer une liste de 15 couples seulement, choisis avec le plus grand soin, dont j'ai donné, en même temps, les distances provisoires (1). Il y aurait un intérêt certain à ce que les spécialistes se donnent la peine de les observer en grand nombre, comme ont bien voulu le faire aussitôt deux d'entre eux, MM. Sémirot à Bordeaux et Duruy à Nancy. On pourrait alors, non seulement étalonner des instruments nouveaux, mais aussi comparer les mesures des divers observateurs et rechercher leurs éventuelles erreurs personnelles sur un ensemble homogène.

CHAPITRE IV.

USAGES DIVERS ET RÉSULTATS.

Mis en service en janvier 1937, l'appareil a reçu sa forme actuelle par le montage du nouveau biréfringent; mais celui qu'il venait remplacer donnait déjà de très bonnes images (2). Le prisme compensateur était commandé en 1939, mais n'a pu être livré avant la guerre qui a interrompu

(1) *J. des Obs.*, vol. XXII, n° 10, 1939, p. 181 et l'*Astronomie*, 53e année, 1939, p. 323.

(2) Il s'agit d'un prisme de second genre de 45°, dédoublant 13′ seulement avec un grandissement très voisin de celui du Wollaston de même angle; il n'a que 16^{mm} d'arête et ne procurait donc qu'une course assez faible. Il est décrit et étudié sous le nom de prisme A (IIIe Partie).

brutalement et pour longtemps le cours normal des travaux de l'Observatoire de Strasbourg. Les observations ont été reprises en juin 1946.

De 1937 à 1939, le micromètre a été presque toujours adapté à l'équatorial de 162^{mm}; un petit nombre de mesures ont été faites au grand équatorial (486^{mm}), d'abord à l'aide d'un gros Wollaston de 61° monté sur le micromètre à fils de platine, ensuite à l'aide du premier micromètre après construction d'un intermédiaire pour sa fixation à la grande lunette.

1. **Mesures micrométriques.** — A. ÉTOILES DOUBLES. — La faible ouverture et le court foyer ($1^{m},85$, soit une raison d'ouverture de 1/11,4 seulement) du 6 pouces en font tout le contraire d'une lunette à étoiles doubles; mais on sait que ce genre de classifications est à revoir lorsqu'on utilise le nouveau micromètre. Le foyer court permet une course de 22″ environ; elle atteindrait 34″ si la course du chariot (16^{mm}) ne venait la limiter avant les dimensions du prisme (26^{mm}). La plus petite distance mesurable est de 1″ environ; mais il faut entendre par là qu'elle se mesure régulièrement et non au prix d'efforts pénibles et d'estimations douteuses. Contrairement au cas du micromètre à fils, où les méthodes classiques sont rarement employées vers les distances de l'ordre du pouvoir séparateur, elles restent ici les mêmes; car le passage de la simple à la quadruple distance pour les petits écartements n'a rien d'un palliatif ou d'un artifice. Loin d'être propre aux cas les plus difficiles, la méthode $4d$ sert dès que la distance est inférieure à cinq ou six fois le pouvoir séparateur.

Compte tenu des pertes de lumière, notamment par division de l'image, la petitesse de l'instrument interdit toutefois l'observation des couples dont une composante est plus faible que la 8e magnitude, malgré l'avantage de pouvoir opérer avec le champ éteint.

Chaque mesure comporte 10 pointés en angle et 20 en distance (10 de chaque côté de la coïncidence), qu'il est facile d'effectuer et de noter en 10 minutes. Les distances supérieures à 4″,5 environ se mesurent par simple distance lorsque les composantes diffèrent peu en éclat (jusqu'à une magnitude), sinon par double distance avec analyseur; mais on est limité alors à 10″ environ au lieu de 20″. Entre 3″,5 et 5″, on a le choix entre les méthodes d et $4d$; on les a souvent utilisées toutes deux pour la même étoile au cours de la première année, où l'on mettait la technique à l'épreuve. Avec un programme de couples à écartement moyen ou petit, la méthode $4d$ sera pratiquement seule appliquée. La méthode du carré qui peut, en principe, donner l'angle et la distance ($2d$) a été, en fait, rapidement abandonnée. Les distances étaient cohérentes pour un couple donné, mais de l'un à l'autre elles concordaient avec les résultats donnés par les autres méthodes, ou en différaient systématiquement; quant à la détermination de l'angle par le carré, son étude

au laboratoire (1) a montré qu'elle comportait une erreur systématique de l'ordre de 2°. Il peut s'agir d'ailleurs d'une inaptitude toute personnelle à la formation du carré et la méthode en soi ne doit peut-être pas être condamnée. Je ferai remarquer toutefois qu'elle n'ajoute rien aux possibilités du micromètre, contrairement aux méthodes avec analyseur, et que les alignements (d et $\sqrt{4}\,d$) permettent la mesure de toutes les distances accessibles.

Ceci dit sur la technique des mesures, passons aux résultats. Parmi les facteurs qui interviennent dans leur qualité, signalons tout d'abord (parce que son rôle ne ressortira pas comme celui des autres) que l'agitation atmosphérique est peu gênante dans l'emploi de la méthode par double image. Comme on pouvait s'y attendre, seule est à considérer la déformation des images, non leurs mouvements. Toutes choses égales d'ailleurs, les conditions d'observation sont toujours meilleures qu'avec un micromètre à fils; bien souvent, il a suffi, pour s'en convaincre, d'imaginer le pointé avec un fil sur l'image agitée que l'on mesurait facilement par double image.

Accord interne. — On a fait une statistique aussi complète que possible des mesures de 1937 à 1939 et de 1946 en calculant pour chaque étoile observée au moins deux fois les écarts moyens en θ, ρ, $\rho\Delta\theta$, enfin ces deux derniers en centièmes de ρ. Pour les couples en mouvement sensible, on a formé des moyennes annuelles (parfois saisonnières), pour les autres des moyennes générales, les observations de 1946 étant toujours groupées en une moyenne distincte. Dans quelques cas, le nombre des mesures n'est pas le même en ρ et en θ, ou bien le mouvement n'est sensible que suivant l'une des coordonnées; c'est pourquoi les moyennes ne reposent pas sur le même nombre d'écarts.

On a été amené, dans certains cas, à considérer, au lieu des écarts moyens en angle, en distance et sur l'arc, les écarts relatifs $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ et $\Delta\theta$ (radians); d'ailleurs, la méthode par double image doit comporter des erreurs *relatives* sensiblement constantes, puisque le jugement porte sur la *forme* d'une figure et non sur une coïncidence.

Les moyennes générales des écarts relatifs sont (en centièmes) :

$$100\,\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0{,}98 \qquad n = 208,$$

$$100\,\Delta\theta_{(\mathrm{rad})} = 0{,}81 \qquad n = 210.$$

Ils sont donc de l'ordre de 1 %, l'écart sur l'arc étant légèrement infé-

(1) *Voir* III[e] Partie.

rieur à l'écart en distance. L'examen des écarts individuels montre aussi qu'ils sont les moins dispersés sur l'arc.

Les paramètres qui déterminent l'aspect du couple et dont nous allons chercher à dégager l'influence, sont au nombre de trois principaux :

1° l'écartement angulaire des composantes;
2° la magnitude m de l'étoile principale;
3° la différence Δm des deux magnitudes.

Classant d'abord tous les écarts moyens $\Delta\theta$, $\Delta\rho$ et $\rho\Delta\theta$ suivant la distance, en distinguant trois groupes suivant Δm, on a obtenu le tableau ci-dessous :

TABLEAU I.

Distances extrêmes.....	$<1'',5$.			1″,5-2″.			2″-3″.		
Moyennes.....	1″,2.			1″,8.			2″,4.		
—	$\Delta\theta$.	$\Delta\rho$.	$\rho\Delta\theta$.	$\Delta\theta$.	$\Delta\rho$.	$\rho\Delta\theta$.	$\Delta\theta$.	$\Delta\rho$.	$\rho\Delta\theta$.
	° 0,0	″ 0,0	″ 0,0	° 0,0	″ 0,0	″ 0,0	° 0,0	″ 0,0	″ 0,0
$\Delta m \leq 0,7$.....	61	009	013	52	017	016	42	016	018
$0,8 \leq \Delta m \leq 2,0$.....	92	018	019	50	024	016	52	024	022
$\Delta m \geq 2,1$.....	-	-	-	84	036	026	89	059	037
	72	012	015	55	021	017	51	024	025

Distances extrêmes.....	3″-5″.			5″-8″.			$>8''$.		
Moyennes.....	4″,0.			6″,0.			10″,6.		
—	$\Delta\theta$.	$\Delta\rho$.	$\rho\Delta\theta$.	$\Delta\theta$.	$\Delta\rho$.	$\rho\Delta\theta$.	$\Delta\theta$.	$\Delta\rho$,	$\rho\Delta\theta$
	° 0,0	″ 0,0	″ 0,0	° 0,0	″ 0,0	″ 0,0	° 0,0	″ 0,0	″ 0,0
$\Delta m \leq 0,7$.....	43	036	030	33	051	034	33	047	060
$0,8 \leq \Delta m \leq 2,0$.....	37	048	026	26	057	027	32	059	056
$\Delta m \geq 2,1$.....	47	044	033	48	008(*)	050	09	042	017
	41	042	029	33	049	033	31	049	053

(*) Une seule étoile.

N. B. — Les moyennes générales sont des moyennes pondérées, et celle de la case du bas ($\Delta m \geq 2,1$) représente généralement beaucoup moins d'écarts que les deux autres.

On voit que l'écart moyen croît un peu moins vite que la distance et plus régulièrement sur l'arc que sur le rayon vecteur. L'influence prédominante de Δm apparaît nettement; il est même surprenant de la trouver aussi importante aux petites distances où la méthode de mesure (4*d*) fait intervenir un pointé *a priori* assez sûr, quel que soit Δm.

Pour étudier l'influence de la magnitude *m*, nous ne pouvons conserver le groupement par distances et réunir les trois catégories de Δm, en raison du rôle essentiel de ce dernier paramètre. Il est aisé de procéder inversement en considérant, cette fois, les écarts relatifs qui dépendent peu de la distance et en maintenant les trois catégories de Δm, ce qui donne le tableau suivant :

TABLEAU II.

m.	2,0-4,4.		4,5-6,4.		> 6,5.	
$\Delta m \leq 0,7$	0,77	0,72	0,71	0,77	0,74	0,78
$0,8 \leq \Delta m \leq 2,0$	1,13	0,69	1,18	0,84	1,09	0,77
$\Delta m \geq 2,1$	1,63	1,33	1,45	0,35	–	–

Dans l'ordre, de gauche à droite : 100 $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ et 100 $\Delta\theta$ (rad.)

L'influence de *m* sur les mesures est donc à peu près inexistante. Signalons que les limites adoptées pour grouper les écarts suivant *m*, Δm et ρ ne correspondent pas, par exemple, au passage d'une méthode de mesure à une autre, mais visent simplement à obtenir une répartition à peu près homogène de ces écarts dans les cases des tableaux.

La statistique montre donc avec évidence que la précision des mesures dépend largement de Δm, assez peu de ρ et pratiquement pas de *m*.

Il faut s'attendre à une dispersion plus grande lorsqu'on observe avec un instrument plus puissant, suivant un programme d'étoiles doubles proportionnellement plus serrées; ceci non pas tant à cause de la petitesse des distances qu'en raison de l'agitation atmosphérique plus sensible. A cet égard, les mesures faites avec le même micromètre au grand équatorial (486^{mm}) de l'Observatoire de Strasbourg en 1938-1939 et en 1946, si elles sont encore trop peu nombreuses pour permettre une étude détaillée des écarts, donnent les indications suivantes :

La moyenne générale des écarts moyens pour 23 étoiles de distances comprises entre 0″,30 et 1″ observées 2, 3 ou 4 fois est de :

1,9 % en distance,
1,2 % (soit 0°,7) en angle,

et leur répartition autour de cette moyenne ne semble pas dépendre de la distance; il est donc permis de considérer les résultats comme très satisfaisants.

Accord externe. — La comparaison de ses propres mesures avec celles d'un autre observateur est toujours difficile et fragmentaire; en outre, elle porte rarement sur les couples faciles, généralement négligés, qui fourniraient les données les plus sûres à ce sujet. A plus forte raison, la comparaison avec plusieurs observateurs est-elle fortement hétérogène. En outre, il faut confronter autant que possible des mesures contemporaines, car bien rares sont les couples dont il soit possible actuellement de garantir la fixité relative ou de donner le déplacement exact suivant les deux coordonnées pour dix ans par exemple; les mieux connus, et qui ont le plus de chances d'être lents, sont les plus écartés et comme tels on les mesure peu (1).

Parmi les mesures faites entre 1935 et 1940, sept séries comportaient au moins plusieurs dizaines de couples communs; les mesures photographiques de Przybyllok, plus anciennes (1929-1938), publiées en 1944, ont pu être utilisées en partie. Le nombre d'écarts est trop petit pour permettre de considérer autre chose que les moyennes générales; on arrive ainsi aux chiffres du tableau suivant :

TABLEAU III.

X.	Instrument.	Méthode.	M. — X. ρ.	M. — X. θ.	n
			"	"	
1. Baize	305	Fils	+0,09	—0,43	86
2. Duruy	275	Couple artificiel	0,00	—0,33	49
3. Hertzsprung	914	Photo	+0,04	—0,68	46
4. Przybyllok	350 et 310	»	0,00	—0,23	30
5. Rougier et Sémirot	217 et 379	Double image	—0,01	+0,04	106
6. Strand	285	Fils	+0,02	—0,35	40
7. Strand	650	Photo	+0,02	—0,51	46
8. Woolley	204 et 305	Fils	+0,04	—0,73	30
9. Fox	470	»	—0,03	+0,40	14
Moyennes	Générale		+0,03	—0,31	447
	Sans Rougier-Sémirot		+0,03	—0,43	341
	1, 2, 6, 8, mesures visuelles		+0,04	—0,39	219
	3, 4, 7, mesures photo		+0,02	—0,51	122

Si l'écart en distance est négligeable devant la dispersion générale des mesures actuelles, il n'en est pas de même en angle où les résultats donnés par trois exemplaires du nouveau micromètre, parfaitement d'accord entre eux, diffèrent de l'ensemble des autres de 0°,5 environ. Une erreur systématique constante dans le pointé paraît peu probable, puisqu'une

(1) D'où le projet d'une courte série de couples-étalons dans les distances courantes, choisis pour leur fixité relative en distance, liste établie et proposée en 1939. (*Voir* à la fin du chapitre précédent.)

symétrie par rapport à la verticale ou à la ligne des yeux devrait l'éliminer dans une moyenne étendue. Peut-on incriminer l'origine des angles, c'est-à-dire la lecture du mouvement diurne ?

Si l'on reporte sur un diagramme la totalité des écarts propres aux mesures visuelles d'une part, photographiques d'autres part (à l'exclusion donc de ceux obtenus dans la méthode par double image), en fonction de l'angle puis de la distance, on constate :

1° que les écarts des premières (séries 1, 2, 6 et 8) sont deux à trois fois plus dispersés que ceux des secondes;

2° que les uns comme les autres paraissent indépendants de l'angle;

3° mais que les écarts des mesures photographiques, grâce à leur groupement meilleur, manifestent une nette décroissance et tendent vers zéro quand la distance augmente.

Ce dernier résultat est particulièrement intéressant, car il met hors de cause la lecture du mouvement diurne dans la méthode par double image, en éliminant l'hypothèse d'une erreur constante. Les mesures visuelles conduisent au même résultat, mais il est moins apparent en raison de la dispersion des écarts correspondants et du fait que les distances ne dépassent pas 9″, au lieu de 16″ dans les mesures photographiques.

Voici, en effet, le tableau des écarts $\theta_X - \theta_M$ (X étant l'observateur étranger) groupés en un petit nombre de moyennes par ordre de distances croissantes :

	Mesures			
	visuelles.		photo.	
Distance.		n.		n.
1″ - 2″,5	+0°,5	116	+1°,1	8
2 ,5- 4	+0,2	10	+0,8	21
4 - 5 ,5	+0,2	20	+0,7	16
5 ,5- 7	+0,3	23	+0,5	16
7 -10	-	-	+0,4	11
10 -16	-	-	+0,1	10

Dans la détermination de la lecture origine, on écarte les deux images d'une étoile simple précisément de 15 à 20″; la concordance des angles pour ces distances vérifie donc le pointé d'alignement lui-même, puisque nous venons d'écarter le cas d'une erreur sur cette lecture origine.

Il est difficile de conclure à une erreur sur l'angle d'une forme déterminée en fonction de la distance; en tout état de cause, c'est sur des mesures de laboratoire et non sur la comparaison avec les observations réelles qu'il faudrait compter pour en faire l'étude. Si cette erreur existe, elle n'excède pas 1 %, de même sens, mais moins importante que celle

trouvée par Rougier et Sémirot dans une discussion (1) sur mes mesures de 1937 seulement, comparées à celles de Hertzsprung.

Je terminerai par une remarque sur le rôle du prisme biréfringent. On pourrait songer, en effet, qu'un défaut de taille fait osciller la direction du dédoublement lorsqu'il défile devant l'oculaire. Pour entraîner l'erreur systématique en angle constatée, il faudrait d'abord que ce défaut soit maximum au centre et nul vers les bords. Il y aurait, en outre, non pas un, mais trois prismes différents en cause, puisque les mesures de Rougier et Sémirot concordent avec les nôtres; enfin, il ne faut plus compter les écartements en secondes d'arc, mais en microns, et la seconde vaut au foyer des trois lunettes utilisées respectivement 9, 15 et 33 microns.

Il n'y a pas lieu de discuter longuement de la comparaison des distances; l'accord peut être considéré comme entièrement satisaifant, sauf peut-être avec les mesures de Baize (qui fournissent un écart nettement détaché des autres).

B. DIAMÈTRES. — Le nouveau micromètre permet de reprendre, dans les meilleures conditions, la mesure des petits diamètres par double image. Nombre d'observations de ce genre ont été effectuées avec les appareils anciens (héliomètres, micromètres de Steinheil et surtout d'Airy), généralement avec de bons résultats. C'est ainsi que le diamètre actuellement adopté pour Vénus résulte des mesures faites par Auwers à l'héliomètre lors des passages de 1874 et de 1882. On a toujours souligné la moindre dispersion des mesures par double image par rapport aux résultats obtenus avec les fils; mais il est non moins établi que les deux méthodes comportent des erreurs systématiques qui apparaissent par leur différence dans la comparaison des résultats. Le nouveau micromètre, exempt des défauts parasites de la plupart des anciens dispositifs, doit permettre d'ailleurs d'étudier la méthode d'une façon absolue et non par comparaison avec une autre sans doute moins sûre qu'elle.

L'appareil est particulièrement propre à la mesure des petits diamètres, où le micromètre à fils lui est certainement inférieur. Son champ d'action est limité, du reste, aux disques d'une dizaine de secondes; on peut espérer l'augmenter en utilisant un prisme de plus grand angle, mais l'essai n'en a pas été fait jusqu'ici, le prisme devant être taillé tout exprès. On ne peut donc mesurer, pour l'instant, que les satellites et les planètes Mercure, Vénus et Mars vers leurs plus grandes distances. Les satellites ainsi que les planètes Uranus et Neptune, feront l'objet d'observations à l'équatorial de 18 pouces; les trois autres ont été mesurées un certain nombre de fois au 6 pouces, Mars en 1937-1938, Mercure et Vénus lors d'une période particulièrement favorable de l'été 1939. Remarquons que, pour ces dernières, on ne saurait considérer comme un inconvénient

(1) *J. des Obs.*, vol. XXVII, nos 7-8, 1944, p. 57.

l'obligation de les mesurer vers la conjonction supérieure; elles présentent alors un grand éclat et leur phase ronde, et cela compense bien la petitesse de leur diamètre dès l'instant qu'on opère par double image.

Voici les résultats ainsi obtenus :

	Diamètre apparent.	Rayon à D = 1.	*n.*	Valeur admise (éphémérides).
Mercure.....	5″- 7″	3″,20±0″,04	11	3″,34
Vénus.....	10-11	8,32±0,03	21	8,41
Mars.....	4- 6,5	4,50±0,05	15	4,68

Chaque mesure résulte de deux séries de 20 pointés, parfois trois dans le cas de Mars, les valeurs correspondantes étant prises dans la moyenne avec un poids 3/2.

Les nombres trouvés sont sensiblement inférieurs à ceux des éphémérides (*Connaissance des Temps, Nautical Almanac*). Sans vouloir aborder une discussion qui remplirait un volume, sinon plusieurs, signalons que ces résultats confirment quelques faits connus et notamment que les diamètres réduits à la distance 1 diminuent avec le diamètre apparent mesuré. Toutefois, la valeur trouvée pour Vénus est beaucoup plus proche de celle des tables que les résultats courants des mesures avec fils. Il y aura donc un intérêt certain à poursuivre ces observations; il est prévu de monter dans le micromètre un prisme qui aura une course plus grande (1) et aussi d'étalonner la mesure au laboratoire.

Les satellites de Jupiter et peut-être Titan, seront mesurés dès que les grosses planètes pourront être observées; les positions favorables, avec forte déclinaison boréale, ont malheureusement été perdues en raison des événements. Dans ces mesures, la méthode de la double image est sans doute la seule, avec les méthodes interférentielles, à pouvoir donner un résultat positif.

2. **Mesures photométriques**. — Les deux images d'un objet quelconque dans l'appareil sont polarisées à angle droit; il paraît donc tout naturel d'en faire un photomètre de Pickering amélioré et de tenter, en particulier, la mesure de Δm dans les étoiles doubles.

L'analyseur a servi au début à renouveler les méthodes de détermination des distances dans le cas des couples très disparates, et les mesures photométriques n'ont pas été entreprises d'abord avec un programme

---

(1) Un prisme de 20×30^{mm} de section, soit 56°,3 d'angle, et dont la course dépassait 35″ a fourni en 1948 quelques nouvelles mesures de Mars dans d'excellentes conditions (voir l'article *L'Aplatissement de Mars* dans l'Astronomie, t. 62, 1948 p. 201).

La mesure de Titan a pu être effectuée lors d'une mission à l'Observatoire du Pic-du-Midi en avril 1947; ces mesures, au nombre de 6, dont 3 par MM. Lyot et Camichel, ont donné 0″,75 avec un écart moyen de 0″,01.

défini; il a paru nécessaire, avant tout, de bien établir les propriétés de l'appareil au point de vue des mesures micrométriques. Ce but paraissant atteint après les observations de 1937-1939, il sera fait désormais une place plus large à la mesure des Δm.

La technique est facile à imaginer. On égalise deux images de nom différent des composantes, par exemple A_1 et B_2, puis les deux dernières des quatre, soit ici A_2 et B_1, en ayant soin d'échanger les positions des images de l'étoile principale et du compagnon entre les deux opérations. On élimine ainsi à la fois l'équation de position de l'observateur et la différence d'éclat possible entre les deux images d'une même étoile. Chaque égalisation se trouve réalisée pour quatre positions de l'analyseur, deux à deux opposées. On peut donc, sans inconvénient, lire à un seul index, l'excentricité de la division s'éliminant automatiquement. On retrouve, dans la seconde opération, les lectures de la première, augmentées d'un angle droit; en raison de ces rapports entre les huit lectures, il est commode d'utiliser une division en grades.

On lira alors par exemple :

Première égalisation.....	28	172	228	372
Deuxième »	128	272	328	72

en supposant les extinctions réglées à 0-200 et 100-300, et l'on voit immédiatement comment grouper les lectures quatre à quatre en deux moyennes dont la demi-différence donnera l'angle α. Cet angle détermine la valeur de Δm corrigée des deux erreurs par la formule

$$\Delta m = -5 \log \operatorname{tg} \alpha,$$

dans un sens facile à distinguer, s'il n'est pas apparent, d'après les lectures d'extinction. En règle générale, d'ailleurs, il est prudent de bien identifier les lectures elles-mêmes dès qu'il s'agit d'un Δm inférieur à 2 ou 3 dixièmes de magnitude, car elles sont affectées des sommes et des différences des deux erreurs, ce qui les déplace suffisamment pour les faire confondre. En pratique, je forme toujours séparément les Δm obtenus dans les deux égalisations, qui diffèrent du double de l'équation de position, erreur la plus importante et qui risque de varier avec le temps ou même suivant le couple observé; ceci d'autant plus que je me suis habitué, par nécessité, à comparer les images non seulement sur une même horizontale, mais au besoin superposées. On y est obligé, en effet, pour les couples assez serrés et qui se présentent suivant la ligne des yeux. Les mesures trahissent une équation de position variable de l'ordre de $0^m,2$.

Il a été fait jusqu'ici une centaine de mesures (1); l'expérience a

(1) Voir la publication de notre première série de Δm (près de 400 mesures) dans les *Annales de l'Observatoire de Strasbourg*, t. 5, fascicule 1 (1948) où l'on trouvera notamment une statistique plus complète des écarts.

montré qu'on peut descendre sans peine aux distances de l'ordre de deux à trois fois le pouvoir séparateur. La commodité des observations a été accrue récemment par la substitution d'un polaroïd au nicol analyseur, ce qui permet d'approcher davantage l'oculaire et d'interposer des écrans colorés.

La statistique de ces mesures a fourni les résultats suivants :

Accord interne. — L'écart moyen d'une détermination (qui repose sur 40 pointés) a été calculé d'après 72 mesures sur 23 couples observés au moins deux fois. On trouve ainsi

$$\text{e. m.} = 0^{m}.04, \qquad n = 72,$$

précision satisfaisante en photométrie différentielle d'étoiles doubles et qui pourra sans doute être améliorée. En effet, ce genre d'observations comporte toujours une période de tâtonnements, dont les premiers résultats ont certainement souffert. Tels qu'ils sont, ils présentent, toutefois, une dispersion plus faible que toutes les autres séries de mesures publiées jusqu'ici, bien qu'elles aient été obtenues avec des instruments d'au moins 30^{cm} d'ouverture.

Accord externe. — On n'est pas embarrassé, ici, par le nombre de documents : ni, en général, par les variations dans le temps de la quantité mesurée, et cela est heureux car les travaux anciens restent utilisables. Cela ne signifie pas, du reste, que l'on doive considérer les Δm comme nécessairement fixes, mais simplement que leur étude en est encore à ses débuts.

On a recherché les couples communs avec les séries suivantes :

H. Pickering, Searle et *Upton* (1878-1879) au 38^{cm} de Harvard muni d'un photomètre à polarisation (*Harv. Ann.*, XI);

h.-Wendell avec les mêmes instruments (1903-1912) (*Harv. Ann.*, LXIX; *Catalogue* dans *Harv. Ann.*, LXIV, 6e Partie);

S-Stebbins avec le même type de photomètre et une lunette de 30^{cm} (1903-1906) (*Univ. of Ill.*; *Bull.*, IV, n° 25);

D.-Detre avec un photomètre à coin par comparaison successive des composantes à une même étoile artificielle, adapté au 10,5 pouces de Munich (1940) (*A. N.*, t. 273, 253);

W.-Wallenquist avec un photomètre à coin également, mais par comparaison directe des deux composantes, avec le 14,5 pouces d'Uppsala (1942-1944) (*Ark. f. Mat. Astr. Fys.*, Stockholm, 30/1 A, p. 1 et 31/3 A, p. 16);

K.-Kuiper. — Quelques mesures seulement publiées, extraites d'un vaste programme en cours d'exécution; observations visuelles à l'aide d'un jeu de réseaux au 10,5 pouces de Leyde et au 12 pouces de Lick. Date et

instrument non précisés pour les mesures données incidemment dans *Aph. J.*, t. 88, 1938, p. 477;

L.-Ferwerda et Kooreman. — Mesures photovisuelles à Leyde sur les clichés ayant servi à des mesures micrométriques et pris aux observatoires de Lick, de l'Union et de Potsdam (*B. A. N.*, vol. X, n° 375).

Cette comparaison a donné les résultats rapportés dans le Tableau IV; la moyenne générale a été obtenue en affectant chacun des sept écarts d'un poids qui est en raison directe de $\sqrt{n}$ et en raison inverse de l'écart moyen interne des mesures de l'observateur considéré.

TABLEAU IV.

X.	M — X. (m).	n.	Poids.
H	+0,06	30	7,8
h	+0,05	24	4,1
S	+0,05	14	6,2
D	—0,14	9	1,3
W	+0,01	23	2,1
K	+0,11	6	3,1
L	0,00	22	9,4
	+0,02	128	

L'accord est aussi bon qu'il était permis de l'espérer; signalons que les mesures de Stebbins, les plus précises parmi ces six séries, ont pour écart moyen interne $0^m,056$.

Ici la méthode est moins nouvelle que pour les mesures micrométriques, mais elle est mieux utilisée que dans les photomètres à polarisation anciens. En particulier, l'emploi du nouveau prisme à dédoublement nul évite la formation de deux cercles oculaires distincts et fait traverser l'analyseur par deux faisceaux parallèles; l'aspect identique des deux images, exemptes de tout astigmatisme sensible, contribue évidemment à la qualité des pointés.

CHAPITRE V.

PRÉCISION COMPARÉE DE LA MÉTHODE, ET QUELQUES AUTRES CARACTÉRISTIQUES DE LA DISPERSION DES MESURES.

Les deux études suivantes illustrent, de façon particulièrement suggestive, les qualités de la méthode de mesure par double image.

1. **Comparaison avec la précision des mesures visuelles et photographiques.** — *a.* Le micromètre à fils est d'un usage suffisamment ancien pour que l'on puisse trouver sans peine des données

sur la précision générale des mesures qu'il fournit. J'ai utilisé les sources suivantes :

Bigourdan (*Sur la mesure micrométrique des petites distances angulaires célestes et sur un moyen de perfectionner ce genre de mesures*) donne un tableau des écarts moyens d'une mesure en distance ($\Delta\rho$) et sur l'arc ($\rho\Delta\theta$) chez cinq observateurs célèbres, en distinguant trois classes de distances. Les nombres diffèrent peu de l'un à l'autre et les moyennes générales sont les suivantes :

TABLEAU V.

		ρ (moy).	$\rho\Delta\theta$.	$\Delta\rho$.
Classe I,	0″-1″.....	0″,6	0″,021	0″,054
» II,	1-2.....	1,35	0,039	0,078
» III,	2-4.....	2,8	0,055	0,086

Doberck, calculant une nouvelle orbite pour 44 i Bootis (*A. N.*, t. 182, 1909, p. 27), joint à la donnée assez courante des *o-c* celle, fort intéressante, de la moyenne de leurs valeurs absolues pour chacun des 21 principaux observateurs; les distances sont groupées autour de 4″ et les moyennes générales suivant les deux coordonnées sont les suivantes :

Pour ρ moy $= 4'',43$, $\Delta\theta = 0°,83$, d'où $\rho\Delta\theta = 0'',064$; $\Delta\rho = 0'',101$.

Enfin, Ekenberg, dans un travail récent : *A study of visual binary stars* (*Med. fr. Lund.*, 2e série, nº 116, 1945), se livre à une investigation analogue sur les petites distances à l'aide de 42 orbites connues et pour 7 observateurs. Ici encore, il paraît légitime de fondre tous les écarts en une moyenne générale suivant chacune des deux coordonnées, ce qui donne

Pour ρ moy $= 0'',26$, $\Delta\theta = 1°,09$, d'où $\rho\Delta\theta = 0'',006$; $\Delta\rho = 0'',018$.

Les données ainsi recueillies résument un nombre considérable d'écarts et couvrent, de façon assez complète, le domaine de distance qu'il est intéressant de considérer; malgré la diversité de nature des trois compilations, on verra que les points obtenus en reportant les écarts en fonction de la distance définissent assez bien, pour chacune des deux coordonnées, une courbe qui se trouve ainsi caractériser la méthode elle-même.

b. La méthode photographique est d'application relativement récente et les travaux statistiques, plus rares, représentent aussi moins d'observations. On a utilisé les suivants :

Dans un recueil de mesures publié récemment (*Publ. d. Sternw. Königsberg*, Heft 13, 1944), Przybyllok indique l'écart moyen d'une plaque pour six classes de distance dont les quatre premières seules ont été considérées ici; la donnée de la distance moyenne pour chacune de ces caté-

gories permet de calculer également l'écart sur l'arc, ce qui donne le tableau suivant :

TABLEAU VI.

	Distances extrêmes.	Moyenne.	$\Delta\theta$.	$\rho\,\Delta\theta$.	$\Delta\rho$.	$\frac{1}{2}(\rho\,\Delta\theta + \Delta\rho)$.
Classe I.....	<3"	2",6	1°,45	0",064	0",094	0",079
» II.....	3-4	3,7	0,77	0,050	0,096	0,073
» III.....	4-6	5,0	0,39	0,052	0,081	0,067
» IV.....	6-12	8,0	0,44	0,061	0,036	0,048

D'après un travail analogue du même auteur paru antérieurement (*Astr. Beob. a. d. Sternw. Königsberg*, Abt 45, IV, 1929), il a été mesuré effectivement *une quinzaine* d'images par plaque; les mesures sur les clichés ont été faites par Labitzke et par l'auteur.

Dans ce premier recueil, se trouve un tableau d'écarts moyens qui a pu être également utilisé dans notre statistique.

Strand, dans un travail important et souvent cité (*Ann. Leiden*, XVIII, 2e partie, 1937), propose de nouvelles orbites pour six couples connus et, s'intéressant particulièrement aux mesures photographiques, fournit des renseignements détaillés sur leur dispersion. La donnée qui, dans ce Mémoire, correspond le mieux à l'écart moyen de plaque indiqué par Przybyllok est l'*écart moyen externe*, résidu de la mesure par rapport à l'orbite déduite de l'ensemble (mesures visuelles comprises). Toutefois, cet écart externe n'est donné que sous forme de moyennes générales pour trois groupes de précision croissante et suivant chacune des deux coordonnées, ces dernières étant ici Δx ($\Delta\alpha \cos\delta$) et Δy ($\Delta\delta$). Nous avons préféré partir de l'écart moyen d'une pose, qui est donné au contraire pour chaque mesure complète d'une plaque (1); la plaque porte en moyenne 55 poses. Les positions conclues sont groupées ensuite par époques voisines en 29 moyennes. On a calculé les 29 moyennes correspondantes pour les écarts de pose et formé, à l'aide des nombres obtenus, six groupes de distance croissantes; les six moyennes finales sont données dans le tableau ci-dessous :

TABLEAU VII.

Écart moyen d'une pose (Strand).

ρ moyen.	Nombre de mesures.	$\varepsilon = \frac{1}{2}(\Delta x + \Delta y)$.	ρ moyen.	Nombre de mesures.	$\varepsilon = \frac{1}{2}(\Delta x + \Delta y)$.
2",6.....	15	0",060	5",8.....	90	0",074
3,9.....	41	0,068	6,8.....	75	0,075
4,9.....	50	0,074	8,7.....	18	0,066

(1) La plupart des plaques ont été mesurées deux ou trois fois, de sorte qu'il y a 288 mesures pour 107 plaques.

Mais il n'eût pas été juste de comparer l'écart d'une mesure visuelle à celui d'une pose unique, ni d'ailleurs à celui d'une plaque qui comporte en moyenne 16 poses chez un auteur et 55 chez l'autre. Il est bien difficile de décider quel est, en matière de mesures photographiques, le document dont le résultat peut être comparé en toute justice à celui d'une mesure visuelle. Il ne paraît pas douteux, par exemple, que la prise et la mesure d'une soixantaine d'images demandent autant de temps et de travail que l'exécution et la réduction de plusieurs mesures visuelles suivant la technique courante; je rappelle à ce sujet que la nouvelle méthode par double image possède le même rendement que l'usage du micromètre à fils.

Strand indique heureusement le nombre total de pointés effectués pour les 288 mesures, d'où il ressort (à raison de 55 poses en moyenne par mesure) que chaque image a fait l'objet de 10 pointés. Compte tenu du fait que l'opération est plus aisée que dans les mesures visuelles sur le ciel, et sans oublier le temps nécessaire à la prise des clichés, nous n'avons pas pensé desservir la méthode photographique en admettant finalement l'équivalence entre une mesure visuelle et le résultat de 5 poses. Comme il y a en moyenne 15 poses par plaque pour Przybyllok et 55 pour Strand, on a multiplié par $\sqrt{3}$ les écarts *de plaque* du premier et divisé par $\sqrt{5}$ les écarts *de pose* du second (1). Cette solution, si arbitraire qu'elle doive paraître, nous a semblé néanmoins préférable à la comparaison brutale de trois sortes d'écarts dont la signification eût été absolument différente.

On a obtenu ainsi le tableau suivant où sont groupés les nombres finalement utilisés pour construire le diagramme d'ensemble.

TABLEAU VIII.

Écart moyen d'une mesure photographique (5 *poses*).

Przybyllok.				Strand.			
1929.		1944.					
3″,7	0″,064	2″,6	0″,137	2″,0	0″,027	5″,2	0″,034
5,6	0,061	3,7	0,126	3,9	0,028	6,8	0,033
19,4	0,069	5,0	0,116	4,9	0,034	8,7	0,029
–	–	8,0	0,083	–	–	–	–

(1) On est donc parti de données différentes pour caractériser les mesures des deux auteurs; précisons cependant que si l'on multiplie par $\sqrt{11}$ l'*écart moyen externe* de Strand pour trouver celui que l'on devrait attendre de 5 poses, on obtient des nombres plus grands que par le mécanisme adopté ici, l'écart propre de la plaque venant ajouter ses effets à ceux de la dispersion des poses sur une même plaque.

Pour ne pas surcharger le diagramme et malgré un effet de distance sensible dans les mesures de Przybyllok en 1944 (Tableau VI), nous avons admis que l'erreur des mesures photographiques était la même dans toutes les directions, de sorte que le nombre unique adopté représente aussi bien un écart en $\Delta\rho$ et en $\rho\Delta\theta$ qu'en x et en y. Les trois moyennes de la première colonne (Przybyllok, 1929) résument les nombres donnés séparément par l'auteur pour deux observateurs et deux machines à mesurer.

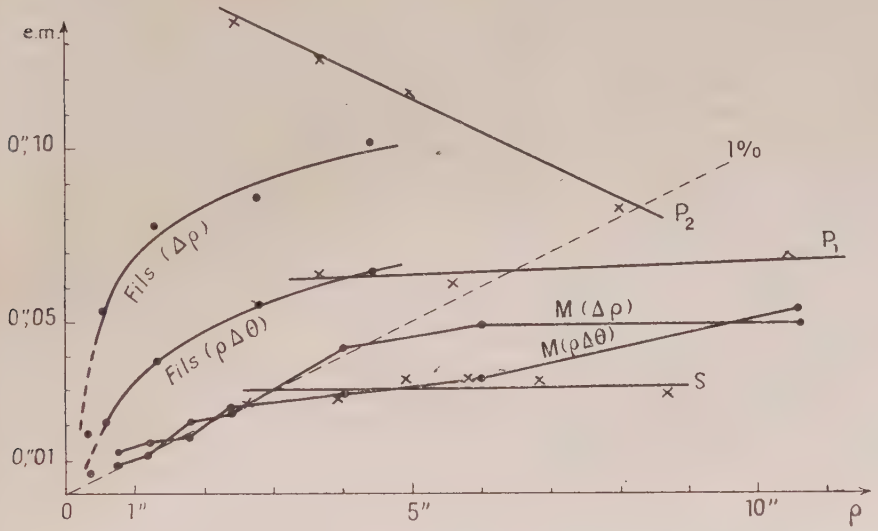

Fig. 20. — Écarts moyens des mesures obtenues à l'aide du micromètre à fils, de la méthode photographique (ramenés à 5 poses) et de la nouvelle méthode par double image.

- Mesures visuelles;
- × Mesures photographiques : Przybyllok (P_1 et P_2) et Strand (S).

Pour les mesures visuelles, on a représenté la précision de la méthode usuelle avec fils par les écarts rapportés plus haut d'après les travaux de Bigourdan, Doberck et Ekenberg. La dispersion de mes propres observations par la nouvelle méthode est caractérisée par les écarts moyens relevés dans le Tableau I (p. 35), auxquels j'ai joint ceux que donnent, pour une distance de 0",7 en moyenne, mes mesures à l'équatorial de 49^{cm} de Strasbourg (p. 36). *Toutes les mesures personnelles utilisées dans le Tableau I ont été effectuées à l'équatorial de* 162^{mm}.

Il me paraît légitime de conclure de l'allure des courbes obtenues et, au seul point de vue de la dispersion propre des résultats donnés par les trois méthodes :

1° que la méthode par double image est toujours supérieure, à toute distance et suivant les deux coordonnées, à la méthode filaire;

2° que cette méthode nouvelle est encore supérieure à la méthode photographique aux distances inférieures à 2″,5 environ, équivalente ou inférieure au delà;

3° enfin, que les petits instruments, fussent-ils de court foyer, permettent d'obtenir grâce à cette méthode d'excellents résultats sur des couples dont l'observation par les deux autres méthodes exigerait des ouvertures et des foyers bien plus considérables, tout en restant moins précise (1).

2. **Statistique des mesures de ε_1 et ε_2 Lyrae.** — J'ai réuni toutes les mesures effectuées au 162^{mm} à l'aide du micromètre à double image en 1937-1939 et en 1946 sur ε_1 et ε_2 Lyrae, dans le double but de comparer les positions conclues et leur groupement à ce que donnent d'autres observations, et d'étudier quelques éléments de leur dispersion. Le choix de ces couples a été dicté par les considérations suivantes :

a. leur mouvement est très lent, mais suffisant pour ne pas inciter les observateurs à les négliger;

b. leurs distances sont de même ordre et l'on a pu considérer les écarts trouvés comme relatifs à un objet unique;

c. leurs Δm valent respectivement $0^m,2$ et 1^m et leurs angles de position diffèrent sensiblement d'un angle droit, ce qui réunit en eux une assez grande variété d'aspect; enfin, ces deux étoiles ont été mesurées le plus souvent au cours des mêmes soirées.

Il y a en tout 42 mesures (dont 18 doubles) en 25 soirées, soit 22 mesures de ε_1 et 20 de ε_2. On a calculé, pour chaque mesure (ρ, θ) :

1° les écarts $\rho - \rho_m$ et $\theta_m - \theta$ par rapport à la moyenne annuelle;

2° l'écart moyen d'un pointé en angle (deux séries de 5) et en distance (deux séries de 10), le premier étant traduit ensuite en écart sur l'arc $(\rho\Delta\theta)$.

D'autre part, on a recherché parmi les mesures faites au laboratoire (2) celles qui concernaient une étoile double artificielle de distance équivalente. On a retenu des mesures d'angle sur le couple n° 6 (2″,8) et des mesures de distance sur le n° 2 dans un autre montage (2″,3), toutes par double image; et l'on a relevé également des mesures de distance avec fils sur ce même couple n° 2. Pour toutes ces mesures de laboratoire, on a calculé l'écart moyen des pointés comme plus haut.

---

(1) Ceci dans l'état actuel de la technique des mesures photographiques, laquelle est susceptible de progresser. La précision des résultats obtenus par cette méthode restera toujours liée, toutefois, à l'emploi d'instruments à très long foyer et la mesure des distances de 2″ et au-dessous, ainsi que l'observation des couples disparates à grand Δm, paraissent réservées pour longtemps encore aux méthodes visuelles.

(2) *Voir* III^e Partie.

Enfin, on a rassemblé les observations étrangères contemporaines des nôtres ou encadrées dans le temps par elles.

Les documents ainsi obtenus ont permis les études suivantes :

A. *Dispersion de nos pointés et de nos mesures suivant l'état des images.* — On a groupé les écarts de pointé et les valeurs arithmétiques des écarts $\rho - \rho_m$, $0 - 0_m$ suivant la qualité des images classées en trois catégories :

I. Très bonnes ou bonnes.
II. Assez bonnes, passables, peu agitées.
III. Agitées, mauvaises.

Réunissant en moyennes uniques les résultats correspondant aux deux étoiles, on a obtenu le tableau suivant :

TABLEAU IX.

	ÉCART MOYEN					
	en distance (méthode $4d$).			en angle.		
Images.	Pointé.	Mesure.	n.	Pointé.	Mesure.	n.
	"	"		°	°	
I.....	0,030	0,016	20	0,28	0,28	23
II.....	0,031	0,015	12	0,40	0,42	12
III.....	0,037	0,030	7	0,32	0,50	7
	0,032	0,018	39	0,32	0,42	42

Ne sont pas compris dans ce tableau les écarts de pointé pour les autres méthodes de mesure de la distance, rarement appliquées dans le cas présent, et qui ont donné

Méthode d ..... $\Delta\rho = 0'',020$ $n = 3$
» l ..... $\Delta\rho = 0'',036$ $n = 2$

La distance s'obtient par la différence des moyennes de deux séries de 10 pointés, divisée ensuite par 2 (cas du losange) ou par 4 (cas des 39 mesures par $4d$). On peut donc calculer l'écart probable sur la distance conclue par chaque méthode :

$$\text{E. p. } (\rho) \begin{cases} 4d & \frac{1}{4}\frac{\Delta\rho\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = 0'',004 \\ l & \frac{1}{2}\frac{\Delta\rho\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = 0'',008 \\ d & \frac{\Delta\rho\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = 0'',009 \end{cases}$$

Le même calcul appliqué à l'angle donne

$$\text{E. p.}(\theta) = \frac{0^{\circ},32}{\sqrt{10}} = 0^{\circ},10,$$

alors que le résidu moyen est $0^{\circ},4$; mais ici l'on a dû négliger la dispersion sur l'origine des angles, mal connue, et qui doit figurer pour une part assez large dans le résidu en angle. En effet, alors que l'écart d'une mesure est toujours inférieur à celui d'un pointé isolé, tant qu'il s'agit des distances, c'est l'inverse qui se produit pour les angles.

L'écart résiduel $|\rho - \rho_m|$ a pour moyenne $0'',018$; la division par $\sqrt{n}$ indique donc une précision tout à fait illusoire. On pourrait objecter à ceci le rôle des erreurs systématiques de soirée dont les effets viendraient s'ajouter à la dispersion interne des pointés; nous verrons plus bas ce qu'il faut en penser.

Au point de vue de la corrélation entre la dispersion des mesures et l'état des images, le tableau des écarts démontre que, si l'influence est dans le sens prévu, elle reste très faible; ni la dispersion des pointés au cours d'une mesure, ni l'écart arithmétique de la mesure par rapport à la moyenne annuelle, suivant l'une ou l'autre des coordonnées, ne sont grandement affectées par l'agitation des images.

Il nous restera à considérer encore les valeurs *algébriques* des écarts $\rho - \rho_m$ et $\theta - \theta_m$ afin de voir si la qualité des images n'intervient pas dans le *sens* des erreurs, pour donner, par exemple, des distances trop fortes par mauvaises images. Nous le ferons à l'occasion de l'un des diagrammes qui suivent.

B. *Dispersion comparée sur le ciel et au laboratoire.* — L'écart moyen d'un pointé dans les mesures de laboratoire a été trouvé égal à :

$\Delta\rho = 0'',023$, $\quad \Delta\theta = 0^{\circ},15$ pour les mesures par double image;
$\Delta\rho = 0'',033$ » » avec fils.

Dans le cas de la première méthode, on perd donc assez peu de précision en passant du couple artificiel à l'étoile réelle, surtout en distance. Mais il est particulièrement frappant de constater que *le pointé par double image sur le ciel comporte le même écart moyen que le pointé avec fils sur une étoile artificielle*, alors que le premier servira à obtenir une quadruple distance, le second, en général, une double distance. La limite extrême de la précision des mesures avec fils, dans le cas d'images absolument immobiles, reste donc nettement inférieure à la précision assurée par la méthode par double image sur le ciel dans des conditions ordinaires.

C. *Recherche des erreurs de soirée.* — Les doubles observations permettent de rechercher s'il y a corrélation entre les écarts $\rho - \rho_m$ ou $\theta - \theta_m$ des mesures correspondantes des deux étoiles; il s'agit, en somme, de

déceler les éventuelles erreurs systématiques de soirée. A cet effet, on a simplement porté en abscisses et en ordonnées respectivement les écarts, soit en angle, soit en distance relatifs aux deux étoiles pour une même soirée, ce qui a donné le diagramme de la figure 21.

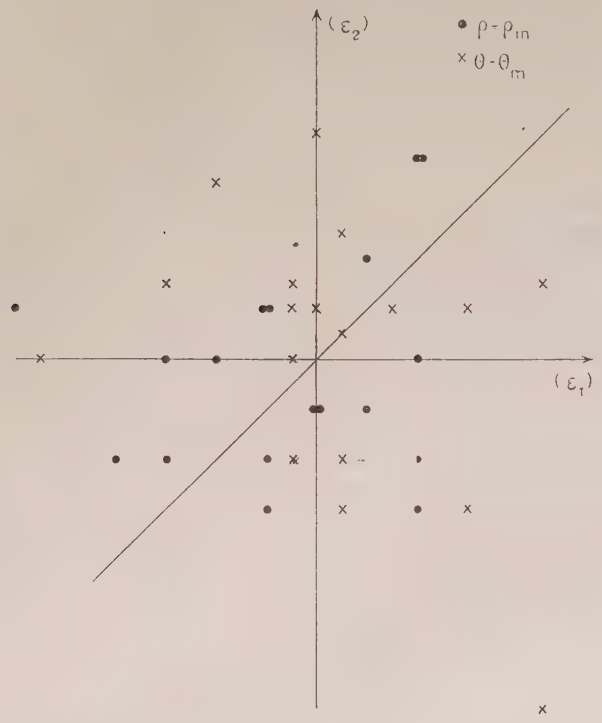

Fig. 21. — Recherche des erreurs de soirée. Absence de toute corrélation entre les écarts par rapport à la moyenne annuelle, soit en ρ soit en θ, des mesures faites le même soir sur ε_1 et ε_2 Lyrae.

S'il y avait corrélation entre les écarts pour une même soirée, les points représentatifs devraient dessiner vaguement la droite $y = x$, ou, au moins, marquer un groupement préférentiel dans le premier, et le troisième quadrants. Or, ces points se répartissent absolument au hasard autour de l'origine, ce qui démontre l'absence de toute erreur de soirée sensible. Ceci conduit à penser également que l'erreur sur l'origine des angles doit être faible, puisque cette erreur affecterait de façon égale les angles des deux étoiles et qu'elle est généralement propre à la soirée.

D. *Groupement comparé des mesures.* — Les observations étrangères utilisées s'étendent de 1937 à 1942 et sont celles de Strand, Phillips, Duruy, Tibor et Schmeidler, toutes effectuées à l'aide d'instruments

plus puissants que le nôtre et au moyen de micromètres à fils. Elles comprennent au total une trentaine de mesures que l'on a reportées sur un même diagramme pour les deux étoiles, en prenant pour origine la position moyenne annuelle conclue de nos mesures par double image (1) et pour axe des x le rayon vecteur correspondant. On a négligé la courbure des cercles $\rho = \text{const.}$ et porté en ordonnées les écarts sur l'arc $\rho\Delta\theta$.

Il n'eût pas été nécessaire de distinguer par des signes particuliers nos mesures; elles se placent toutes, sauf deux, à l'intérieur d'un cercle de 0″,05 de rayon auquel toutes les autres sont extérieures. Pour la clarté du diagramme, on les a représentées, toutefois, à part et à une échelle différente, et l'on n'a reporté sur le diagramme d'ensemble que le cercle qui les contient pratiquement toutes (*fig.* 22).

Parmi les mesures étrangères, on a isolé en les entourant d'un trait continu celles de Schmeidler, qui paraissent se grouper systématiquement à l'écart des autres, en angle pour ε_1, en distance pour ε_2. On a ajouté enfin, figurées par deux petits cercles, les positions moyennes obtenues par Sémirot à l'aide de la même méthode que les nôtres.

Pour mettre en évidence un dernier aspect de l'indépendance assez large de nos résultats à l'égard de la qualité des images, on a adopté, pour représenter les points conclus, trois symboles différents suivant la classe d'images correspondante, à savoir :

— un point pour les observations par images de classe I;
— une croix pour les observations par images de classe II;
— un triangle pour les observations par images de classe III.

Les croix et les triangles fournissent peut-être quelques-uns des points les plus éloignés du centre, mais leur point moyen est indiscernable de celui de l'ensemble; l'agitation des images n'introduit donc, dans les mesures, rien d'autre qu'un faible accroissement de la dispersion, à l'exclusion de toute erreur systématique. La faible corrélation entre la dispersion d'un pointé au cours d'une mesure et celle de cette mesure elle-même par rapport à la moyenne annuelle résulte, non seulement des nombres rapportés dans le Tableau IX, mais encore d'un diagramme plus détaillé et que nous ne reproduirons pas ici; on y a représenté chaque mesure par un point ayant pour abscisse l'écart moyen du pointé $\Delta\rho$ ou $\Delta\theta$, et pour ordonnée l'écart de la mesure $\rho - \rho_m$ ou $\theta - \theta_m$. La corrélation est à peine indiquée pour les distances et inexistante pour les angles.

Revenant au diagramme de la figure 22, on remarquera aussi la loi de répartition très différente des mesures données par les deux méthodes; les mesures avec fils fournissent un semis de points fortement allongé dans

(1) Ce choix se justifie, tant par le meilleur groupement de nos mesures que par le faible déplacement de ladite origine de 1937 à 1942 (0″,08 environ) par rapport à la dispersion des autres mesures.

le sens du rayon vecteur (avec une dispersion totale de 0″,5, soit 20 % de la distance), alors que la méthode par double image donne un groupement indépendant de la direction. Elle partage donc cette qualité précieuse

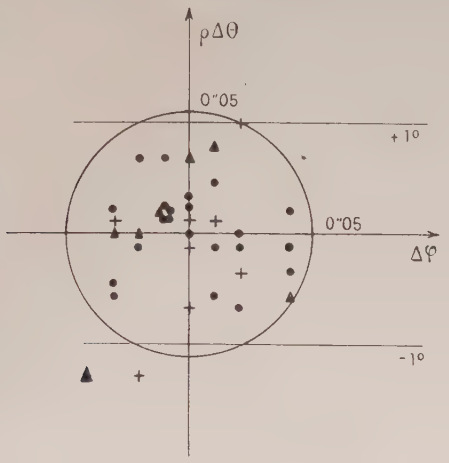

Fig. 22 *a*. — Mesures par double image.
Répartition autour du point moyen pour ε_1 et ε_2 Lyrae (distance moyenne 2″,5).
● Images TB ou B; + Images AB ou passables; ▲ Images agitées.

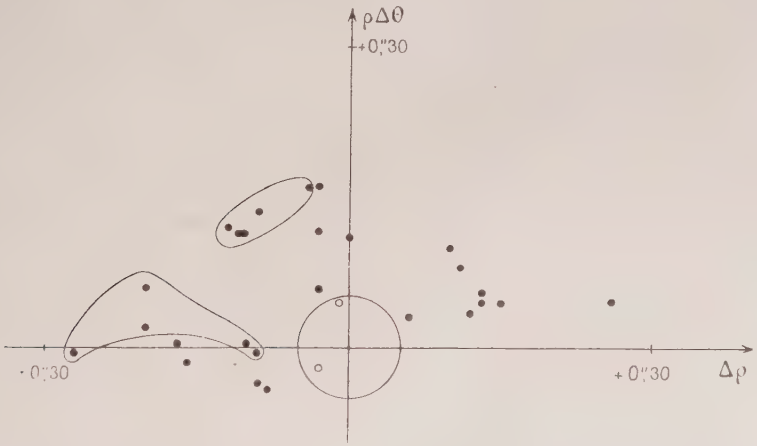

Fig. 22 *b*. — Positions conclues pour ε_1 et ε_2 Lyrae, d'après divers observateurs.
● Mesures avec fils; ○ Mesures par double image (Sémirot).
De nos propres mesures, 36 sur 38 sont dans le cercle de 0″,10.

avec la méthode photographique, bien que la technique des mesures, contrairement au cas de la photographie, soit très différente pour les deux coordonnées.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE THÉORIQUE DES PRISMES BIRÉFRINGENTS.

Nous allons indiquer comment on peut calculer les deux constantes fondamentales, dédoublement angulaire et grandissement, d'un biréfringent de forme assez générale, et étendre les méthodes de calcul employées à l'étude de quelques propriétés intéressantes de ces prismes. On trouvera successivement :

1° une étude dans le plan de la section principale, limitée à la détermination des deux constantes pour une incidence nulle ou petite, mais concernant des biréfringents de forme plus générale que ceux dont nous avons parlé jusqu'ici;

2° un calcul plus complet de la propagation d'un rayon quelconque, donc d'un faisceau, à travers quelques biréfringents particuliers, suivi d'applications pratiques, notamment numériques.

Chacune de ces deux sections contient donc certains résultats de l'autre sous forme de cas particuliers, sans pour cela qu'il soit indiqué de supprimer l'une ou l'autre ni même de les réunir. Le calcul simple est très suffisant dans la plupart des cas et ce serait une erreur que de laisser croire à la nécessité d'un calcul compliqué lorsqu'on peut s'en passer, et de redescendre systématiquement du général au particulier. C'est pourquoi l'achèvement des calculs complets ne m'a rien fait retrancher de l'exposition des calculs simples qui avaient précédé et qui ont souvent servi de guide.

Ces problèmes n'ont guère été abordés jusqu'ici. On trouve, dans le *Traité d'Optique* de Billet [1] le calcul complet de la double réfraction d'un rayon de lumière naturelle passant de l'air dans un milieu cristallin uniaxe ou biaxe. Plus récemment, Erman [2] faisait la théorie de la lunette de Rochon; malheureusement, une erreur de principe commise dès le début enlève à ses calculs beaucoup de leur intérêt : Erman suppose, en effet, que le rayon ordinaire traverse le prisme de Rochon comme une lame isotrope d'indice n_0, ce qui est faux, puisqu'au contraire les deux rayons changent de nom en passant d'un milieu dans le suivant. Enfin, Brendel [3] a étudié un phénomène qui se manifestait de façon gênante

---

(1) Tome I, p. 383.

(2) *A. N.*, t. 57, 1862, p. 273.

(3) *Beob. Erg. der Kgl. Stw. zu Berlin*, t. 6, 1891, p. 11.

dans l'usage d'un micromètre combiné, à fils et à biréfringent, imaginé par Wellmann. Les deux images d'un fil situé peu en avant d'un biréfringent et observé à travers ce dernier ne sont pas, en général, vues parallèles; Brendel s'est efforcé de déterminer le taux de la déformation et de trouver des formes de biréfringents qui ne la provoquent point. Malheureusement, et bien que ses calculs prétendent être abordés sous une forme assez générale, Brendel n'a pas su s'écarter des biréfringents déjà existants (Rochon et Wollaston); il lui échappe ainsi toute une famille de solutions, les plus intéressantes. Nous y reviendrons en trouvant les deux familles de solutions existantes.

Quoi qu'il en soit, rien n'a été utilisé des trois sources en question, que j'ai trouvées, soit pendant, soit même après mes calculs. Il semble que ces auteurs aient répugné à se livrer à des calculs approchés; or, pour des biréfringences aussi faibles que celle du quartz, les méthodes d'approximation sont aussi légitimes que fécondes. Elles permettent à la fois de rester plus près de la réalité et de pousser beaucoup plus loin l'exploitation des résultats obtenus.

CHAPITRE I.

CALCUL APPROCHÉ DES DEUX CONSTANTES FONDAMENTALES.

1. **Expression générale du grandissement.** — Donnons d'abord l'expression générale, purement géométrique du grandissement g ou plus exactement de son inverse γ, quantité toujours petite.

Soit un biréfringent d'angle p et d'épaisseur $2l$ où les deux rayons issus d'un incident quelconque suivent les trajets $OM_1N_1R_1$ et $OM_2N_2R_2$ (*fig.* 23), entièrement définis par les angles α et β de leurs segments successifs avec la normale à la face d'entrée; comptons ces angles dans le sens trigonométrique à partir de la normale dirigée dans le sens de la propagation. Dans la figure, α_2 et β_2 seront positifs, α_1 et β_1 négatifs.

On observe, dans le plan de visée π, deux images I_1 et I_2 et l'on cherche comment leur écartement I_1I_2 varie avec l'abscisse X du point d'incidence O sur la face d'entrée dans le plan de la section principale; par définition, le coefficient de cette variation sera égal à γ. Nous avons pris l'origine des abscisses à l'arête réfringente du premier prisme; elle joue d'ailleurs un rôle secondaire puisque seules les *variations* de X nous intéressent. Prenant pour axe des y la parallèle à la direction-origine des angles, on trouve sans peine les coordonnées de M_1 et de M_2 :

$$x_1 = \frac{X}{1 - \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg} p}, \qquad y_1 = \frac{X \operatorname{tg} p}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg} p},$$

où l'on affectera x, y et α des indices 1 pour M_1, 2 pour M_2.

L'équation de M_1N_1 s'écrit

$$x'_1 - x_1 + (y'_1 - y_1)\operatorname{tg}\beta_1 = 0.$$

Nous cherchons la différence des abscisses de I_1 et de I_2 pour en étudier la variation avec X; cette dernière est évidemment indépendante du plan de visée π choisi. Il nous est donc permis de simplifier, en supposant que π est le plan de la face de sortie, ce qui donne

$$x'_1 = x_1 - (2l - y_1)\operatorname{tg}\beta_1 = X\frac{1 + \operatorname{tg}p\operatorname{tg}\beta_1}{1 + \operatorname{tg}p\operatorname{tg}\alpha_1} - 2l\operatorname{tg}\beta_1,$$

de même pour le point M_2 avec les indices 2.

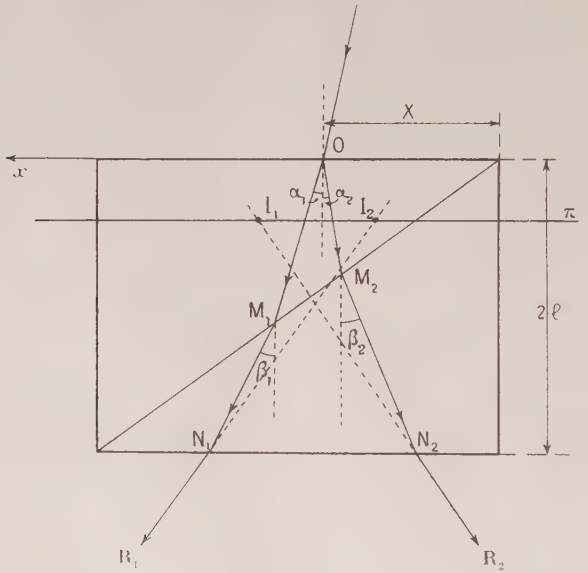

Fig. 23. — Calcul de l'effet micrométrique dans un plan π.

Faisant la différence $x'_2 - x'_1$, on constate qu'elle varie linéairement avec X, ce qui était à peu près évident, avec un coefficient

$$\frac{\Delta(I_1I_2)}{\Delta X} = \gamma = \frac{1 + \operatorname{tg}p\operatorname{tg}\beta_2}{1 + \operatorname{tg}p\operatorname{tg}\alpha_2} - \frac{1 + \operatorname{tg}p\operatorname{tg}\beta_1}{1 + \operatorname{tg}p\operatorname{tg}\alpha_1},$$

qui s'écrit aussi

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\alpha_2}{\cot p + \operatorname{tg}\alpha_2} - \frac{\operatorname{tg}\beta_1 - \operatorname{tg}\alpha_1}{\cot p + \operatorname{tg}\alpha_1}.$$

On peut simplifier l'expression de γ en supposant les angles α et β petits. On obtient ainsi

$$\gamma = \operatorname{tg}p[(\beta_2 - \beta_1) - (\alpha_2 - \alpha_1)].$$

Les parenthèses ne sont autres que l'écart angulaire des deux rayons dans le second et le premier milieu. Le grandissement g est donc d'autant plus petit et le phénomène plus important que le passage par le plan de coupe modifie davantage cet écart angulaire.

Si l'on tient compte des termes du second ordre, on obtient une meilleure approximation sous la forme

$$\gamma = \operatorname{tg} p[(\beta_2 - \alpha_2)(1 - \alpha_2 \operatorname{tg} p) - (\beta_1 - \alpha_1)(1 - \alpha_1 \operatorname{tg} p)],$$

dont nous ferons usage exceptionnellement.

2. **Application à un biréfringent quelconque.** — 1° Formules préliminaires. — Nous considérerons comme biréfringent quelconque celui qui satisfait aux conditions suivantes :

a. les faces d'entrée et de sortie sont parallèles;

b. ces faces ainsi que le plan de coupe suivant lequel sont assemblés les deux prismes sont perpendiculaires à un même plan qui est celui de la section principale;

c. les axes cristallographiques des deux milieux peuvent être chacun, ou normal au plan de la section principale, ou contenu dans ce plan.

Le calcul approché de la marche d'un rayon dans un tel biréfringent peut se faire par des moyens très simples si l'on introduit, dès le début, des formules approchées tenant compte de la faible biréfringence du quartz; nous n'envisageons donc, en principe, que ce cas particulier. Il va sans dire toutefois que les résultats obtenus fourniront au moins une indication, à défaut de données précises, dans le cas du spath.

On peut ramener tous les calculs à un petit nombre de constructions analogues, où interviennent deux grandeurs essentielles. Nous allons définir ces dernières et les exprimer aussitôt en fonction des données du problème élémentaire qui servira, sous différentes formes, à effectuer, par le calcul, la construction d'Huygens dans chacun des cas.

Considérons la méridienne de la surface d'onde, soit une ellipse dont les axes sont proportionnels aux inverses des indices n_o et n_e, le grand axe étant dirigé suivant l'axe cristallographique du milieu. Nous poserons, une fois pour toutes,

$$n_o = n \qquad \text{et} \qquad n_e - n_o = \varepsilon.$$

La biréfringence relative $\frac{\varepsilon}{n}$ est de l'ordre de 0,006 et sera toujours considérée comme un infiniment petit du premier ordre, ce qui nous permet d'écrire les axes de l'ellipse sous la forme

$$a = 1, \qquad b = 1 - \frac{\varepsilon}{n}.$$

Soit maintenant une tangente en T (*fig.* 24) définie par son angle φ avec le grand axe; soient $d = OH$ sa distance à O et α l'angle de OH

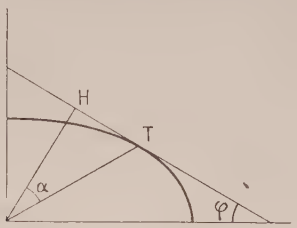

Fig. 24. — Définition de α et de d.

avec le rayon vecteur OT. On montre sans peine qu'avec les notations définies plus haut on a sensiblement

$$d = 1 - \frac{\varepsilon}{n} \cos^2 \varphi,$$

$$\alpha = -\frac{\varepsilon}{n} \sin 2\varphi.$$

On voit que l'angle α est une quantité du même ordre de petitesse que la biréfringence relative qui vaut environ 20′ d'angle; le calcul approché de α est donc légitime.

2° Biréfrigents de premier genre. — Convenons de ranger dans cette catégorie tous les biréfringents de la forme suivante (*fig.* 25) :

- - axe du premier prisme dans le plan de la section principale et incliné d'un angle φ compté positivement de 0 à 180° vers le plan de coupe;
— axe du deuxième prisme normal au plan de la section principale.

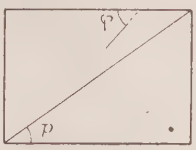

Fig. 25. — Prisme de premier genre.

Nous étudierons d'abord, pour tous les prismes que nous considérerons, le cas de l'incidence normale.

Affectant de l'indice 1 les quantités relatives à la propagation du rayon qui est d'abord ordinaire (car il change de nom ensuite), on aura

$$\alpha_1 = 0.$$

Le rayon extraordinaire est le rayon vecteur au point de contact de la tangente menée à la méridienne de la surface d'onde parallèlement à la face d'entrée; cette méridienne est l'ellipse dont le grand axe fait un angle φ avec la face d'entrée. On retrouve donc l'angle calculé plus haut et l'on a

$$\alpha_2 = -\frac{\varepsilon}{n}\sin 2\varphi \quad (1).$$

Au passage par le plan de coupe, le premier rayon devient extraordinaire et sa réfraction est donnée par la construction de la figure 26.

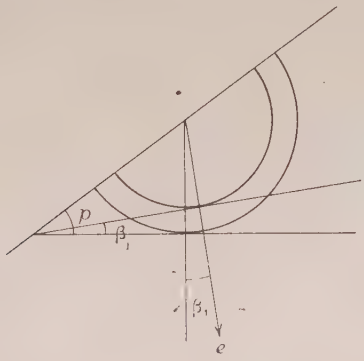

Fig. 26. — Construction de la seconde réfraction du rayon extraordinaire (prisme de premier genre).

Les rayons des cercles représentant les surfaces d'onde sont 1 et $1-\frac{\varepsilon}{n}$ et l'onde incidente fait avec la surface de séparation l'angle p, de sorte que l'on a

$$\sin(p - \beta_1) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\sin p,$$

$$\sin p - \beta_1 \cos p = \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\sin p.$$

$$\beta_1 = \frac{\varepsilon}{n}\operatorname{tg} p.$$

---

(1) D'où la loi de l'écartement des images dans le micromètre à boule de spath. En effet, on peut considérer que cette dernière agit sur la direction d'un pinceau de rayons comme une lame parallèle, sa courbure ne faisant, en première approximation, qu'en augmenter la convergence.

La séparation des pinceaux à la sortie, dont les variations permettent les mesures, est bien

$$e = Kr\alpha_2 = -Kr\frac{\varepsilon}{n}\sin 2\varphi,$$

où φ varie comme les rotations de la boule.

Le rayon extraordinaire devient ordinaire. Soit ω l'angle de l'onde incidente avec l'onde réfractée (*fig.* 27); c'est aussi l'angle des normales et l'angle β_2, avec un signe tel que l'on aura

$$\beta_2 = \quad \omega.$$

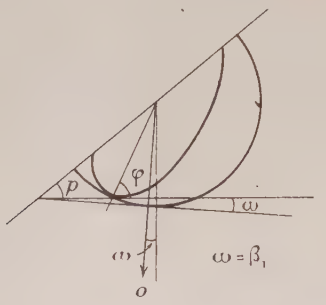

Fig. 27. — Construction de la seconde réfraction du rayon ordinaire (prisme de premier genre).

Écrivons le rapport des distances de O à ces deux ondes :

$$\frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{n}\cos^2\varphi} = \frac{\sin(p+\omega)}{\sin p},$$

$$1 + \frac{\varepsilon}{n}\cos^2\varphi = 1 + \omega \cot p,$$

d'où

$$\beta_2 = -\omega = -\frac{\varepsilon}{n}\operatorname{tg} p \cos^2\varphi$$

Nous avons donc, en résumé,

$$\alpha_1 = 0. \qquad \alpha_2' = -\frac{\varepsilon}{n}\sin 2\varphi. \qquad \beta_1 = \frac{\varepsilon}{n}\operatorname{tg} p; \qquad \beta_2 = -\frac{\varepsilon}{n}\operatorname{tg} p \cos^2\varphi.$$

ce qui donne, à partir de la formule générale pour γ et en renversant le signe, puisque l'indice 2 appartient ici au rayon ordinaire,

$$\gamma = +\frac{\varepsilon}{n}\operatorname{tg} p\,[\operatorname{tg} p(1+\cos^2\varphi) \quad \sin 2\varphi].$$

A la sortie du prisme, comme dans le second milieu les deux rayons se propagent normalement aux ondes, et comme la différence de rayon entre les deux cercles est négligeable devant le rayon n du cercle qui correspond à l'air, le dédoublement angulaire sera donné sensiblement par

$$\delta = +\varepsilon \operatorname{tg} p\,(1+\cos^2\varphi).$$

Le signe de δ correspond à la définition suivante : nous compterons δ

à partir du rayon ordinaire vers le rayon extraordinaire et le signe + sera pris dans le sens trigonométrique.

Supposons maintenant que nous échangions les faces d'entrée et de sortie en retournant le prisme. La même méthode donne

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \qquad \beta_1 = -\frac{\varepsilon}{n}(\sin 2\varphi - \operatorname{tg} p \cos^2\varphi), \qquad \beta_2 = -\frac{\varepsilon}{n}\operatorname{tg} p$$

et l'on retrouve la même expression de γ.

On refait le calcul de δ en considérant à nouveau les ondes dans le second milieu et l'on retrouve également la valeur antérieure.

Les prismes de premier genre sont donc réversibles par rapport à γ et à δ; les phénomènes sont conservés en grandeur et en sens.

3° Biréfrigents de second genre. — Les deux axes sont, dans le plan de la section principale, définis par leurs inclinaisons φ et φ' comptées comme φ dans le cas précédent (*fig.* 28). Ils dépendent donc de trois

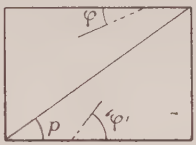

Fig. 28. — Prisme de second genre.

paramètres (p, φ, φ') au lieu de deux seulement comme les précédents, et offriront davantage de possibilités.

Étudions la propagation des deux rayons dans un tel prisme. Il n'y a plus de changement de nom; le rayon ordinaire traverse donc le prisme comme une lame isotrope d'indice n et l'on a

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0.$$

Le rayon extraordinaire subit, à la première réfraction, la même déviation que dans le premier cas :

$$\alpha_2 = \frac{\varepsilon}{n}\sin 2\varphi$$

et la seule construction nouvelle est donc celle du passage par le plan de coupe (*fig.* 29). Calculons comme plus haut le rapport des distances à O :

$$\frac{1 - \frac{\varepsilon}{n}\cos^2\varphi'}{1 - \frac{\varepsilon}{n}\cos^2\varphi} \qquad \frac{\sin(p+\omega)}{\sin p},$$

ce qui donne

$$\omega = \frac{\varepsilon}{n}\operatorname{tg} p(\cos^2\varphi - \cos^2\varphi');$$

d'autre part, l'angle du rayon réfracté avec la normale OT′ à l'onde est égal à

$$-\frac{\varepsilon}{n}\sin 2\varphi'.$$

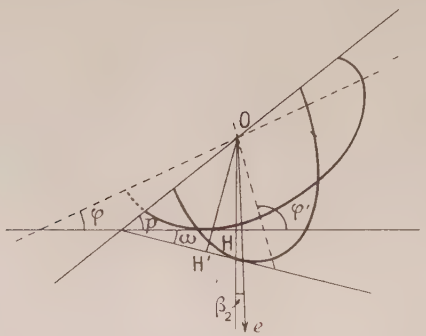

Fig. 29. — Calcul de la seconde réfraction du rayon extraordinaire (prisme de second genre).

On trouve β_2 en corrigeant cet angle de $-\omega$; d'où, en résumant,

$$\alpha_1=\beta_1=0, \qquad \alpha_2=-\varepsilon\sin 2\varphi, \qquad \beta_2=-\frac{\varepsilon}{n}[\sin 2\varphi'+\operatorname{tg} p\,(\cos^2\varphi-\cos^2\varphi')]$$

et, enfin, la constante γ

$$\gamma=\frac{\varepsilon}{n}\operatorname{tg} p[\sin 2\varphi-\sin 2\varphi'-\operatorname{tg} p(\cos^2\varphi-\cos^2\varphi')]$$

Le dédoublement angulaire représente la déviation du seul rayon extraordinaire. L'onde arrive sur la face de sortie sous un angle égal à ω (*fig.* 30). On a ici une déviation négative pour ω positif, soit

$$\delta=-n\omega=\varepsilon\operatorname{tg} p(\cos^2\varphi'-\cos^2\varphi).$$

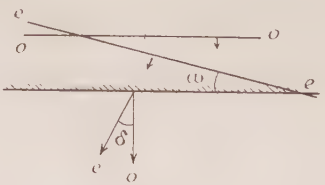

Fig. 30. — Arrivée des ondes sur la face de sortie.

On remarquera que ces deux constantes s'écrivent comme la différence de celles de deux biréfringents de premier genre définis par (p, φ') et (p, φ).

Dans le cas présent, on peut simplifier l'expression des constantes et en donner une forme qui permet le calcul logarithmique et qui traduira mieux les propriétés de certaines formes particulières de ces biréfringents. Introduisons l'angle p' défini par

$$\operatorname{tg} p = 2 \operatorname{tg} p'$$

et exprimons les différences de sinus et de cosinus en fonction des lignes trigonométriques de $\varphi + \varphi'$ et de $\varphi - \varphi'$; on obtient ainsi

$$\gamma = 2 \frac{\varepsilon}{n} \frac{\operatorname{tg} p}{\cos p'} \sin(\varphi - \varphi') \cos(\varphi + \varphi' - p'),$$

$$\delta = \varepsilon \operatorname{tg} p \sin(\varphi + \varphi') \sin(\varphi - \varphi').$$

Il est inutile de recommencer le calcul pour le prisme retourné, qui constitue simplement un autre biréfringent de second genre, où les angles φ et φ' seraient échangés. On constate ainsi que le prisme retourné a des constantes égales et de signe opposé à celles du prisme en position directe.

3. **Cas particuliers. Biréfringents nouveaux.** — 1° Prisme de Rochon. — C'est le biréfringent de premier genre où $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (*fig.* 31 *a*); on a donc

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{n} \operatorname{tg}^2 p, \qquad \delta = + \varepsilon \operatorname{tg} p.$$

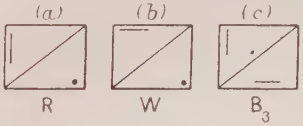

Fig. 31. — Prismes particuliers : Rochon, Wollaston, Troisième biréfringent.

2° Prisme de Wollaston. — C'est un autre biréfringent de premier genre, avec $\varphi = 0$ (*fig.* 31 *b*); d'où

$$\gamma = 2 \frac{\varepsilon}{n} \operatorname{tg}^2 p, \qquad \delta = + 2 \varepsilon \operatorname{tg} p.$$

soit les constantes doubles de celles du Rochon.

3° Troisième biréfrigent. — Il s'agit d'un prisme de second genre défini par

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi' = 0 \quad (\textit{fig.}\ 31\ c)$$

et qui a donc pour constantes

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{n} \operatorname{tg}^2 p, \qquad \delta = \varepsilon \operatorname{tg} p.$$

c'est-à-dire, au signe près, celles du Rochon.

On remarquera que, pour ces trois prismes, l'expression de γ est la même en première et en seconde approximations, puisque $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

4° Prisme Δ_0 ($\delta = 0$). — Il n'existe évidemment aucun prisme à dédoublement nul parmi ceux de premier genre. Pour les autres, il suffit de faire

$$\cos^2 \varphi = \cos^2 \varphi',$$

soit, puisque φ et φ' sont compris entre zéro et π :

$$a. \quad \varphi = \varphi'.$$
$$b. \quad \varphi + \varphi' = \pi.$$

La première forme est celle de la lame à faces parallèles. Mais la seconde est celle d'un véritable biréfringent, dont nous avons déjà parlé plus haut. L'expression de sa constante γ, prise sous sa forme logarithmique, se simplifie grâce à la condition satisfaite par la somme $\varphi + \varphi'$, et l'on trouve

$$\delta = 0, \qquad \gamma = 2 \frac{\varepsilon}{n} \operatorname{tg} p \sin 2\varphi \qquad \text{(prismes } \Delta_0\text{)}.$$

5° Prismes Γ_0 ($\gamma = 0$). — Il y a, cette fois, des solutions parmi les prismes des deux genres.

a. Premier genre. — Il faut

$$\sin 2\varphi - \operatorname{tg} p (1 + \cos^2 \varphi) = 0,$$

soit en divisant par $\cos \varphi$, ce qui est légitime puisque nous savons que pour $\cos \varphi = 0$, on a $\gamma = 0$

$$2 \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} p (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) - \operatorname{tg} p = 0,$$

ce qui donne

$$\operatorname{tg} \varphi = \cot p \pm \sqrt{\cot^2 p - 2}.$$

Il y a donc, pour un angle donné p, deux solutions si

$$\cot p > \sqrt{2},$$

soit environ

$$p < 35^\circ,3.$$

Comme $\cot p$ est essentiellement positif, on voit que les deux valeurs de φ sont inférieures à $\frac{\pi}{2}$.

Cette solution était celle trouvée par Brendel, qui donnait toutefois l'expression, plus compliquée, de $\cos\varphi$.

Remarquons que dans le prisme limite de cette famille de solutions, on a

$$\operatorname{tg}\varphi = \cot p, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} - p.$$

Signalons aussi la relation simple que l'on obtient en divisant la somme des racines par leur produit

$$\cot\varphi_1 + \cot\varphi_2 = \cot p.$$

Enfin, l'expression de δ se simplifie pour ces prismes et leurs constantes s'écrivent

$$\gamma = 0, \qquad \delta = \pm\varepsilon \sin 2\varphi \qquad (\text{prismes } \Gamma_0^1).$$

b. Second genre. — La forme logarithmique de γ donne immédiatement les conditions

$$a. \quad \varphi = \varphi',$$

$$b. \quad \varphi + \varphi' = \frac{\pi}{2} + p'.$$

La première correspond encore à la lame à faces parallèles, dont les deux constantes, d'ailleurs, sont bien nulles.

La seconde définit une forme de biréfringent dont le dédoublement angulaire prend une expression simple; on a finalement

$$\gamma = 0, \qquad \delta = -2\varepsilon \sin(\varphi' - \varphi) \sin p' \qquad (\text{prismes } \Gamma_0^2).$$

Etude des prismes nouveaux. — Nous n'insisterons pas sur les trois premiers prismes, qui ne sont pas nouveaux. Mais on peut s'arrêter davantage aux propriétés des suivants, dont seuls ont été décrits jusqu'ici, par Brendel, ceux du type Γ_0'.

On peut se demander tout d'abord s'il existe des prismes communs aux deux catégories, c'est-à-dire dont les deux constantes soient nulles. Il faudrait les chercher nécessairement parmi ceux du second genre et leur imposer les deux conditions

$$\delta = 0, \qquad \varphi + \varphi' = \pi,$$

$$\gamma = 0, \qquad \varphi + \varphi' = \frac{\pi}{2} + p'.$$

Mais la définition de p' montre que cet angle est toujours inférieur à $\frac{\pi}{2}$, et les conditions sont incompatibles. Nous excluons naturellement la lame à faces parallèles qui, considérée comme un biréfringent de second genre particulier, aurait bien ses deux constantes nulles, ainsi que nous l'avons vu en posant successivement les deux conditions.

Ceci posé, étudions séparément les prismes Δ_0 et Γ_0.

A. *Prismes* Δ_0. — Ce sont des prismes de second genre où p et φ sont *quelconques et indépendants* et où l'on doit seulement avoir

$$\varphi' = \pi - \varphi.$$

Le rayon ordinaire se propage sans déviation; l'extraordinaire a une marche définie par

$$\alpha_2 = -\beta_2 = -\frac{\varepsilon}{n}\sin 2\varphi = -\alpha \qquad (fig.\ 32),$$

donc indépendante de l'angle de coupe p.

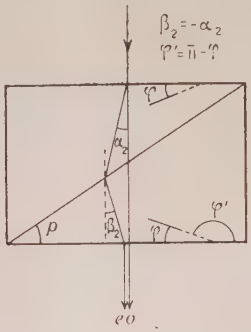

Fig. 32. — Prisme Δ_0.

Ses déviations passent par un maximum pour $p = \frac{\pi}{4}$ et γ prend alors une valeur qui constitue un maximum relatif; il n'existe pas de maximum absolu en raison du facteur tg p.

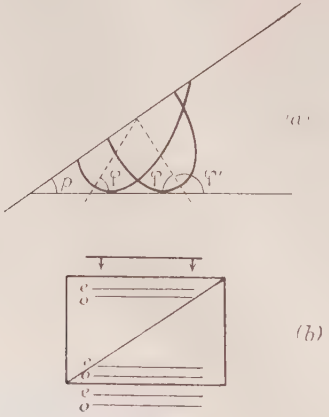

Fig. 33. — Propagation parallèle des deux ondes dans un prisme Δ_0.

Il résulte de cette propagation que les rayons sortent confondus quand le rayon extraordinaire traverse le plan de coupe à égale distance des

faces d'entrée et de sortie, soit sensiblement quand le rayon incident arrive sur le milieu de la première.

Les prismes Δ_0 possèdent encore une autre propriété intéressante. Considérons une onde plane parallèle à la face d'entrée; elle donne naissance à deux ondes qui seront encore parallèles dans le premier milieu. Mais la construction d'Huygens pour la traversée du plan de coupe (*fig.* 33 *a*) montre immédiatement que l'onde extraordinaire n'y subit pas de déviation. Finalement, les deux ondes auront donc traversé tout le prisme et en sortiront sans avoir cessé d'être parallèles à l'onde incidente (*fig.* 33 *b*). Cette propriété n'est d'ailleurs qu'une autre forme de la condition de dédoublement nul, son existence étant nécessaire et suffisante pour qu'on ait $\delta = 0$. C'est à elle également que l'on doit attribuer la bonne qualité des images obtenues en faisant traverser au faisceau un prisme même assez épais de ce type.

B. *Prismes* Γ_0. — Il nous faut distinguer ici ceux des deux genres. Les prismes Γ_0^1, nous l'avons vu, sont limités à un angle de coupe voisin de 35°. Pour toutes les valeurs de p inférieures, les angles φ_1 et φ_2 sont déterminés; c'est donc une famille de prismes à un seul paramètre.

On peut, par conséquent, choisir p de façon à satisfaire à une condition supplémentaire. La plus simple est de rechercher un dédoublement maximum en valeur absolue; il faut pour cela que $\sin 2\varphi$ soit maximum. Voyons donc si la valeur $\frac{\pi}{4}$ de φ correspond à une solution. L'équation

$$\sin 2\varphi - \operatorname{tg} p(1 + \cos^2 \varphi) = 0,$$

donne alors

$$\operatorname{tg} p = \frac{2}{3},$$

qui convient. On trouve pour ce prisme

$$p = 33°,7 \qquad \text{et} \qquad \delta_m = -31',3.$$

Nous avons indiqué sommairement que Brendel s'était occupé de ces prismes; il mentionne également ce prisme à δ maximum.

Brendel étudiait les biréfringents à propos du micromètre de Wellmann, où l'on utilisait les images des fils, vus à travers un prisme de ce genre. Le seul mouvement qu'on lui donnait était la rotation autour de l'axe de la lunette, sans entraîner les fils; dans ces conditions, on observe que « ...l'image extraordinaire de la droite présente une inclinaison notable par rapport à l'image ordinaire; ce phénomène s'observe très nettement sur un fil tendu dans le plan focal ».

L'auteur ne précise pas, lorsqu'il présente cette déformation comme un fait notoire, donc déjà observé avant lui, s'il s'agit d'un objet éloigné ou, au contraire, du seul cas des fils d'un réticule, qui se trouvent très

près de la première face du prisme. En réalité, cet effet se manifeste sur les images d'objets observés à une distance quelconque et il ne s'agit pas, en général, de l'effet micrométrique (mesuré par la constante γ). Si l'on regarde dans un champ d'une dizaine de degrés par exemple à travers un biréfringent, comme le dédoublement angulaire est variable avec l'incidence, on observera (*fig.* 34) une image extraordinaire qui se déduira de l'ordinaire : 1° par un déplacement d'ensemble; 2° par une déformation qu'on peut assimiler, dans un champ réduit (où l'on peut considérer δ comme une fonction linéaire de l'incidence), à une dilatation dans le sens de ce déplacement dans un rapport

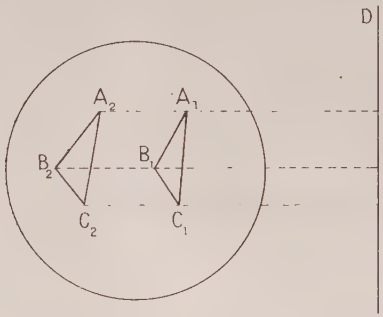

Fig. 34. — Aspect des images vues à travers un biréfringent dans un champ angulaire étendu.

voisin de 1; on comprendra aussi, sous ce vocable, le cas de la contraction où le rapport est inférieur à 1.

On peut dire aussi qu'il y a seulement dilatation (1) par rapport à une certaine droite D le long de laquelle δ serait nul si, pour les fortes incidences, il restait fonction linéaire de l'angle d'incidence avec le coefficient valable pour l'incidence normale. Dans la plupart des cas, la droite D sera loin en dehors du champ, c'est-à-dire qu'en aucun point de ce dernier on ne verra d'images confondues; on constatera seulement qu'elles sont nettement moins séparées à une extrémité du champ qu'à l'autre.

De cette déformation, il résulte, en particulier, qu'une droite qui n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à D donne deux images non parallèles, dont on peut calculer le petit angle en fonction de son angle avec D et du coefficient de la dilatation, évidemment égal à

$$1 - \frac{\Delta\delta}{\Delta i}.$$

Le phénomène micrométrique est absolument insensible dans une telle expérience, puisqu'il porte sur l'écartement linéaire des rayons

(1) Il s'agit plus exactement d'une affinité orthogonale par rapport à D.

émergents, non sur leur angle; la variation de leur écartement pour toute l'étendue L de la face d'entrée est γL; pour le faisceau qui pénètre dans l'œil, il s'agit d'une amplitude de l'ordre de $0^{mm},5$. Pour tout objet qui ne se trouve pas immédiatement devant la face d'entrée du biréfringent, l'effet angulaire correspondant est insensible. Dans le cas d'objets rapprochés par contre, les deux effets interviennent. Or, Brendel ne tenait compte que de celui qu'il connaissait, l'effet angulaire mesuré par $\frac{\Delta\delta}{\Delta i}$. S'il a cependant supprimé les deux phénomènes en même temps, c'est grâce au fait très remarquable que l'on a, *dans tous les biréfringents des deux genres* et pour l'incidence normale, ainsi que nous le démontrerons plus loin,

$$\frac{\partial\delta}{\partial i} = \gamma.$$

Passons maintenant aux prismes Γ_0^2. Brendel ne pouvait les déterminer par ses calculs, car il commence par poser la condition que les axes des deux milieux soient perpendiculaires, afin que le prisme ne transmette qàe deux et non quatre rayons; or, si cette condition est suffisante elle n'est pas nécessaire, puisque les prismes de second genre, que Brendel s'interdit ainsi d'envisager, possèdent néanmoins la même propriété.

Étudions quelques caractéristiques de ces prismes.

a. Montrons d'abord que la condition $\gamma = 0$ correspond à une propriété géométrique simple.

Dans la formule générale de γ (p. 56) on voit que, le rayon ordinaire se propageant sans déviation dans le prisme, γ ne peut être nul que si le rayon extraordinaire présente la même particularité, puisqu'on doit avoir

$$\alpha_2 = \beta_2,$$

du fait qu'on a déjà

$$\alpha_1 = \beta_1.$$

Il est facile de vérifier directement qu'on a bien, avec cette forme de propagation, un effet micrométrique nul; en effet, la distance des deux rayons à l'émergence, ou dans un plan de visée π quelconque, sera constante dans les déplacements du prisme (*fig.* 35).

On peut même s'arranger pour que le rayon extraordinaire continue son trajet dans l'air sans déviation. Il suffit que

$$\delta = \beta_2.$$

Comme $\alpha_2 = \beta_2$, il vient

$$2\varepsilon \sin(2\varphi - p') \sin p' = \frac{\varepsilon}{n} \sin 2\varphi$$

d'où l'on tire la relation

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{n \sin 2p'}{1 - 2n \sin^2 p'}.$$

b. Utilisons enfin le fait que les prismes Γ_0^2 dépendent de deux paramètres, puisqu'il n'y a qu'une relation entre p, φ et φ', pour chercher ceux qui ont un dédoublement angulaire maximum, p étant donné.

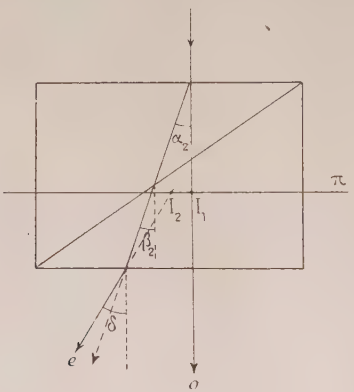

Fig. 35. — Marche des rayons dans un prisme Γ_0^2 et cas particulier où les rayons émergent tous deux sans déviation.

D'après la formule établie pour δ, dans le cas de ces prismes, on voit qu'il faut

$$\varphi' - \varphi = \frac{\pi}{2},$$

ce qui détermine le prisme

$$\varphi = \frac{p'}{2} \qquad \text{et} \qquad \varphi' = \frac{\pi}{2} + \frac{p'}{2}$$

ou

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + \frac{p'}{2} \qquad \text{et} \qquad \varphi' = \frac{p'}{2};$$

c'est-à-dire le même prisme en position directe ou retournée; on retiendra surtout que les prismes Γ_0^2 à dédoublement maximum sont ceux où les axes sont perpendiculaires.

La valeur de ce dédoublement est alors

$$\delta_m = 2\varepsilon \sin p'.$$

Elle est généralement inférieure au δ_m absolu des prismes Γ_0^2, qui est l'équivalent en angle de la constante ε. Elle ne le dépasse qu'à partir

d'un angle p tel que

$$\sin p' = \frac{1}{2}, \qquad p' = 30^\circ,$$

d'où

$$p = \operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg}30^\circ) = 49^\circ,1.$$

4. **Corrections diverses.** — Nous nous proposons d'étudier l'effet, sur les valeurs de γ et de δ ainsi calculées, de différentes causes d'erreur. Nous pourrons avoir d'abord des écarts sur les valeurs des quantités qui figurent dans leurs expressions; ensuite, certaines hypothèses que nous avons faites peuvent n'être pas justifiées.

Nous continuerons à supposer que tout se passe dans le plan de la section principale, qui sera, par définition, celui des normales à la face d'entrée et au plan de coupe. Il peut arriver que le rayon incident ou la normale à la face de sortie s'en écartent d'un petit angle; nous négligerons cette composante des phénomènes, dont les effets ne sauraient être que de second ordre dans le plan de la section principale.

Ceci posé, nous étudierons cinq effets principaux.

1° Effet de couleur. — La longueur d'onde intervient dans les quantités ε et $\frac{\varepsilon}{n}$ qui se trouvent en facteur respectivement dans δ et dans γ, ceci pour tous les prismes. Les constantes subiront donc les mêmes variations relatives que ces coefficients; on trouve ainsi, pour $\lambda = 0^\mu,575$,

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = 0{,}11\,\Delta\lambda, \qquad \frac{\Delta\delta}{\delta} = 0{,}19\,\Delta\lambda,$$

avec $\Delta\lambda$ en microns.

On voit qu'il s'agit de variations relatives un peu supérieures à 1 % pour $0^\mu,1$.

2° Erreur sur p. — Il nous faut distinguer, au moins en ce qui concerne γ, les deux genres de prismes :

Premier genre. — Différentiant l'expression de γ, on trouve

$$\Delta\gamma = (1 + \operatorname{tg}^2 p)\left[\sin 2\varphi \quad 2\operatorname{tg} p(1 + \cos^2\varphi)\right]\Delta p.$$

où l'on peut introduire les constantes elles-mêmes, ce qui donne

$$\Delta\gamma = (1 + \operatorname{tg}^2 p)\left(\frac{\gamma}{\operatorname{tg} p} - \frac{\delta}{n}\right)\Delta p = (n\gamma\cot p - \delta)\frac{\Delta p}{n\cos^2 p}.$$

Second genre. — Nous avons vu que les constantes d'un prisme de second genre peuvent s'écrire comme la différence de celles de deux prismes de premier genre; l'angle p est le même, ainsi que son écart Δp, et la façon dont les constantes figurent dans l'expression de γ trouvée

pour les prismes du premier genre permet d'écrire la même formule pour les autres.

Le calcul de $\Delta\delta$ est plus simple encore; en effet, l'angle p intervient, dans les deux sortes de prismes, par un facteur tg p seulement. On a donc

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} = \frac{\Delta(\operatorname{tg} p)}{\operatorname{tg} p} = (\cot p + \operatorname{tg} p)\,\Delta p.$$

On remarquera que la variation relative de δ est stationnaire pour $p = 45°$, dont les valeurs courantes s'écartent assez peu. On a donc sans grande erreur

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} = 2\,\Delta p = 0{,}035 \qquad \text{pour} \quad \Delta p = 1°.$$

3° Erreurs sur φ, φ'. — *a. Prismes de premier genre.* — On trouve, en différentiant par rapport à φ,

$$\Delta\gamma = \frac{\varepsilon}{n}\operatorname{tg} p\,(2\cos 2\varphi + \operatorname{tg} p \sin 2\varphi)\,\Delta\varphi = C(\varphi)\,\Delta\varphi,$$
$$\Delta\delta = +\,\varepsilon \operatorname{tg} p \sin 2\varphi\,\Delta\varphi = D(\varphi)\,\Delta\varphi.$$

Il n'y a pas intérêt cette fois à écrire plutôt les variations relatives. Par contre, on voit que les formules se simplifient pour des prismes particuliers (Rochon ou Wollaston), quel que soit p.

b. Prismes de second genre. — Ramenant ce cas au précédent grâce à la relation entre les deux genres déjà mentionnée, on peut écrire

$$\Delta\gamma = C(\varphi)\Delta\varphi - C(\varphi')\Delta\varphi',$$
$$\Delta\delta = D(\varphi)\Delta\varphi - D(\varphi')\Delta\varphi'.$$

4° Effet prismatique. — L'erreur prismatique consiste dans le non-parallélisme des faces du biréfringent. Elle sera mesurée par leur petit angle ϖ et son existence nous obligera à préciser la définition de l'angle de coupe.

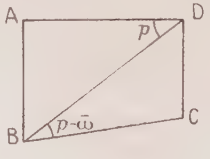

Fig. 36. — Définition de l'erreur prismatique.

Soit ABCD la section principale, nous poserons (*fig.* 36)

$$\widehat{ADB} = p$$

et nous ferons l'hypothèse que les deux faces du biréfringent sont normales à ce plan. L'erreur prismatique sera alors définie par l'angle

$$p - \widehat{DBC} = \varpi.$$

Si, d'une façon plus générale, aucune des deux faces n'est orientée comme nous le supposions dans les calculs, nos définitions reviennent à dire que l'on a

$$\widehat{ADB} = p + \Delta p \qquad \text{et} \qquad \widehat{DBC} = p + \Delta p - \varpi.$$

L'erreur Δp ne peut donc résulter que de l'orientation de la face d'entrée, tandis que l'erreur prismatique dépend de celle des deux faces. Ceci dit, étudions l'effet sur les constantes.

a. Erreur sur γ. — Il nous faut remonter à la définition de γ. Soient BC et BC′ (*fig.* 37) la trace réelle de la face de sortie et sa position supposée.

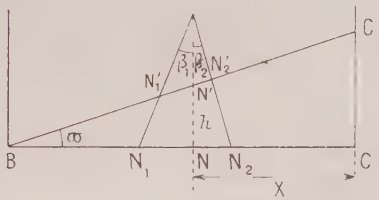

Fig. 37. — Effet de l'erreur prismatique sur γ.

Les deux rayons font les angles β_1 et β_2 avec le rayon incident, perpendiculaire à BC et émergent en N_1', N_2' au lieu de N_1, N_2. Le rayon incident coupe BC en N, B′C′ en N′; soient

$$NN' = h, \qquad BC = L, \qquad CN = X.$$

Par définition, en négligeant $1 - \cos\varpi$, on a

$$\gamma = \frac{\Delta(N_1N_2)}{\Delta X};$$

$$\gamma + \Delta\gamma = \frac{\Delta(N_1'N_2')}{\Delta X},$$

d'où

$$\Delta\gamma = \frac{\Delta(N_1'N_2' - N_1N_2)}{\Delta X}.$$

On a sensiblement

$$N_1'N_2' - N_1N_2 = h(\beta_2 - \beta_1), \qquad L - X = \varpi(\beta_2 - \beta_1).$$

d'où, enfin,

$$\Delta\gamma = \varpi(\beta_2 - \beta_1),$$

que nous développerons pour les différents biréfringents.

b. Erreur sur δ. — Il nous faut considérer maintenant non plus les rayons, mais les ondes. Soient ω_1 et ω_2 les angles orientés des ondes ordinaire et extraordinaire avec la face de sortie (*fig.* 38). On peut écrire, en première approximation,

$$\delta = n(\omega_2 - \omega_1).$$

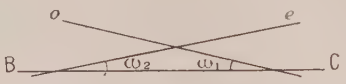

Fig. 38. — Figure montrant pourquoi l'effet prismatique sur δ ne peut être que de second ordre.

Or, l'erreur prismatique ne modifie évidemment pas l'angle des deux ondes incidentes, de sorte qu'elle reste sans effet sensible sur δ. L'erreur est de second ordre; on peut d'ailleurs la calculer sans peine en tenant compte, dans la construction d'Huygens à l'émergence, des termes nécessaires. On trouve ainsi, après avoir, d'autre part, introduit les valeurs de $\beta_2 - \beta_1$ dans $\Delta\gamma$ pour les différents prismes :

Prisme de premier genre :

$$\Delta\gamma = +\varpi\frac{\varepsilon}{n}\operatorname{tg} p(1+\cos^2\varphi) = -\varpi\frac{\delta}{n}, \qquad \Delta\delta = -\varpi\varepsilon.$$

Prisme de premier genre retourné :

$$\Delta\gamma = -\varpi\frac{\varepsilon}{n}[\sin 2\varphi - \operatorname{tg} p(1+\cos^2\varphi)] = \varpi\gamma\cot p, \qquad \Delta\delta = -\varpi\varepsilon\cos^2\varphi.$$

Prisme de second genre :

$$\Delta\gamma = -\varpi\frac{\varepsilon}{n}[\sin 2\varphi + \operatorname{tg} p(\cos^2\varphi - \cos^2\varphi')], \qquad \Delta\delta = \varpi\varepsilon\cos^2\varphi'.$$

5° Effet d'incidence. — Nous nous étions placés jusqu'ici dans le cas de l'incidence normale. Il s'agit maintenant de considérer celui d'une incidence i petite, toujours dans le plan de la section principale, et de voir ce que deviendront les constantes du prisme.

Contrairement aux erreurs précédentes, l'étude de celle-ci nécessite un nouveau calcul de la propagation. La méthode est exactement la même; seules les formules sont un peu plus longues à écrire. Il faut tenir compte aussi du second terme de γ dans le cas des prismes de second genre. Mais, dans tous les cas, seule la construction de la première

réfraction est différente, les autres n'étant qu'à reprendre avec des valeurs légèrement modifiées des angles. Nous ne donnerons pas le détail de ces calculs, d'ailleurs faciles à conduire. Il se produit finalement des simplifications importantes dans les résultats eux-mêmes, où l'on voit s'introduire les valeurs des constantes calculées pour l'incidence normale. On trouve ainsi :

Prisme de premier genre (dans les deux positions) :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial i} = \frac{\operatorname{tg} p}{n}\left(3\frac{\varepsilon}{n}\sin^2\varphi - 2\gamma\right), \qquad \frac{\partial \delta}{\partial i} = -\gamma.$$

Prisme de second genre :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial i} = \frac{\operatorname{tg} p}{n}\left[3\frac{\varepsilon}{n}(\sin^2\varphi - \sin^2\varphi') - 2\gamma\right], \qquad \frac{\partial \delta}{\partial i} = -\gamma.$$

Retenons de ces résultats :

a. la loi très remarquable de $\frac{\partial \delta}{\partial i}$, commune à tous les biréfringents étudiés;

b. le fait que ces dérivées, comme les constantes elles-mêmes, s'expriment pour les prismes du second genre par la différence de leurs valeurs pour deux prismes de premier genre;

c. que le prisme de premier genre est réversible par rapport aux dérivées comme par rapport aux constantes.

APPENDICE.

PRISMES A CONSTANTES STATIONNAIRES.

Après avoir calculé γ et δ, nous avons distingué des prismes particuliers : les formes classiques d'abord, puis les prismes à constantes nulles et parmi ces derniers quelques-uns qui remplissent certaines conditions supplémentaires.

L'étude des causes d'erreur nous amène à en considérer d'autres encore. Mettant à part l'effet de couleur, qui est le même dans tous les biréfringents, nous pourrions rechercher ceux qui sont insensibles à chacune des autres erreurs. Mais seul le cas de l'erreur d'incidence est intéressant, parce que, pour un prisme donné, on peut agir, volontairement ou non, sur l'angle d'incidence du rayon qui lui arrive; les autres erreurs, au contaire, portent sur la forme du prisme et ne dépendent pas de l'usage qu'on fait de ce dernier.

Nous chercherons donc à déterminer des biréfringents dont l'une ou l'autre des constantes soit stationnaire sous l'incidence normale.

1° γ STATIONNAIRE. — La condition

$$\frac{\partial \gamma}{\partial i} = 0,$$

s'écrit différemment suivant le prisme considéré.

a. Prisme de premier genre. — Il faut

$$3\sin^2\varphi - 2\operatorname{tg} p[\sin 2\varphi - \operatorname{tg} p(1+\cos^2\varphi)] = 0,$$

ce qui conduit à un trinome en $\operatorname{tg}\varphi$ dont le discriminant a pour valeur

$$-4\operatorname{tg} p\,(1+2\operatorname{tg}^2 p).$$

Écartant évidemment le cas de $p = 0$, on voit qu'il n'y a pas de solution parmi ces prismes.

b. Prisme de second genre. — Dans la condition

$$3\frac{\varepsilon}{n}(\sin^2\varphi - \sin^2\varphi') \quad 2\gamma = 0,$$

utilisons la forme logarithmique de γ et introduisons également, dans l'autre terme, les arcs $\varphi+\varphi'$ et $\varphi-\varphi'$; il vient $\sin(\varphi-\varphi')$ en facteur et comme nous éliminons la solution de la lame à faces parallèles, il reste

$$3\sin(\varphi+\varphi') - 2\operatorname{tg} p[2\cos(\varphi+\varphi') + \operatorname{tg} p\sin(\varphi+\varphi')] = 0.$$

On voit apparaître comme inconnue $\varphi+\varphi'$, comme dans les conditions qui nous ont donné déjà d'autres cas particuliers de prismes de second genre.

La condition devient

$$\operatorname{tg}(\varphi+\varphi') = \frac{4\operatorname{tg} p}{3 - 2\operatorname{tg}^2 p}.$$

Comme φ et φ' ne sont limités supérieurement qu'à la valeur π, il y a, pour chaque valeur de p, deux solutions pour $\varphi+\varphi'$.

On pourra imposer une condition supplémentaire et achever de déterminer le prisme. Celles que nous avions examinées plus haut sont :

$$\delta = 0, \qquad \varphi+\varphi' = \pi,$$

$$i = 0, \qquad \varphi+\varphi' = \frac{\pi}{2} + p',$$

$$\delta_{max}, \qquad \varphi'-\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

La première est incompatible avec celle trouvée; la seconde, portant comme elle sur $\varphi+\varphi'$, conduit à déterminer, non ces deux angles,

mais p. On trouve

$$\cot p' = \frac{-4\operatorname{tg} p}{1-2\operatorname{tg}^2 p} \qquad \text{avec} \quad 2\operatorname{tg} p' = \operatorname{tg} p,$$

qui n'admet pas de solution.

La troisième condition, par contre, peut toujours être satisfaite. Remplaçant φ' par sa valeur en fonction de φ dans l'autre condition, on trouve

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{tg} p - \frac{3}{4}\cot p.$$

On peut donc calculer φ, puis on aura

$$\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}.$$

2° δ STATIONNAIRE. — La condition est la même pour tous les prismes :

$$\frac{\partial \delta}{\partial i} = -\gamma = 0$$

et l'on voit que les prismes à dédoublement stationnaire sont ceux à γ nul, soit tous les prismes Γ_0.

L'intérêt de ces prismes biréfringents est de fournir un dédoublement angulaire parfaitement déterminé sans qu'il soit nécessaire d'être rigoureusement dans le cas de l'incidence normale.

TABLES.

La théorie précédente a permis le calcul des tables ci-dessous, qui donnent un aperçu des possibilités offertes tant par la méthode que par la grande variété des biréfringents considérés.

Les valeurs numériques des constantes du quartz ont été prises pour la longueur d'onde $0^{\mu},575$ qui correspond au minimum focal d'un objectif visuel, très proche du maximum de sensibilité de l'œil. On a donc

$$n = 1{,}54494, \qquad \varepsilon = 0{,}00914 = 31'.27, \qquad \frac{n}{\varepsilon} = 169.03.$$

TABLE I. — *Constantes d'un prisme de premier genre.* — On n'a considéré que des valeurs de p courantes dans le cas du quartz; on peut étendre au cas du spath, si l'on ne recherche qu'un ordre de grandeur, en divisant les grandissements par 17,5 et en multipliant les dédoublements par 19.

On donne g de préférence à γ, qui était surtout commode à écrire dans le cours des calculs. Les expressions des constantes ont été mises,

pour le calcul numérique, sous la forme

$$\gamma = \frac{1}{g} = 0{,}0592\,\mathrm{tg}\,p[\sin 2\varphi - \mathrm{tg}\,p(1{,}5 + 0{,}5\cos 2\varphi)],$$

$$\delta = 31',27\,\mathrm{tg}\,p(1{,}5 + 0{,}5\cos 2\varphi).$$

a. Valeurs de g.

φ \ p	25°.	30°.	35°.	40°.
0°	+ 388,7	+ 253,5	+ 172,1	— 120,0
15	902,9	475,1	282,9	179,5
30	— 7 250	+2 026	636,2	334,1
45	— 1 206	—2 186	1 799	779,9
60	— 1 280	2 028	25 960	1 101
75	14 500	+2 521	976,9	509,6
90	+ 777,4	507,0	344,8	240,1
105	363,4	262,3	193,6	144,4
120	250,2	184,4	138,6	105,2
135	213,3	156,9	117,7	89,2
150	215,5	156,0	115,4	86,3
165	258,6	181,1	130,2	94,9
180	388,7	253,5	172,1	120,0

φ \ p	45°.	50°.	55°.	60°.	65°.
0	+ 84,5	+ 59,5	+ 41,4	+28,2	+18,1
15	118,0	78,6	52,1	34,3	21,6
30	191,2	116,3	72,5	45,1	27,3
45	338,1	180,1	103,6	61,1	35,6
60	440,2	227,4	128,8	75,1	43,1
75	298,1	183,8	115,6	72,1	44,1
90	169,0	119,0	82,9	56,3	36,8
105	107,9	80,0	58,5	41,6	28,3
120	79,9	60,2	44,6	32,2	22,2
135	67,6	50,9	37,7	27,1	18,7
150	64,6	48,0	35,2	25,0	17,1
165	69,5	50,6	36,3	25,6	17,0
180	84,5	59,5	41,1	28,2	18,1
Valeur de φ pour g min.	141,6	143,1	144,6		146,1
Valeur de φ pour g max.	51,6	53,1	54,6		56,1
Valeur de φ pour g min.	148,2	150,4	152,8	155,1	158,5
Valeur de φ pour g max.	58,2	60,4	62,8	65,1	68,5

b. Valeurs de δ.

φ.	p.....	25°.	30°.	35°.	40°.
0° ou 180°	.....	+29′,2	+36′,1	+43′,8	+52′,5
15	165.....	28,2	34,9	42,3	50,7
30	150.....	25,5	31,6	38,3	45,9
45	135.....	21,9	27,1	32,8	39,4
60	120.....	18,2	22,6	27,4	32,8
75	105.....	15,6	19,3	23,4	28,0
	90.....	14,6	18,1	21,9	26,2

φ.	p.....	45°.	50°.	55°.	60°.	65°.
0° ou 180°	.....	+62′,5	+74′,5	+89′,3	+108′,3	+134′,1
15	165.....	60,4	72,0	86,3	104,7	129,6
30	150.....	54,7	65,2	78,1	94,8	117,4
45	135.....	46,9	55,9	67,0	81,2	100,6
60	120.....	39,1	46,6	55,8	67,7	83,8
75	105.....	33,4	39,8	47,6	57,8	71,6
	90.....	31,3	37,3	44,7	54,2	67,1

Les Tables A et B donnent, en particulier, les constantes du Rochon ($\varphi = 90°$) et du Wollaston ($\varphi = 0$ ou $180°$).

TABLE II. — *Prismes* Γ_0^1. — On ne donne de ces prismes que la forme (c'est-à-dire p et les deux solutions correspondantes pour φ) et le dédoublement angulaire δ; par définition, g est infiniment grand en valeur absolue. On sait que l'angle de coupe est limité à 35°,3; c'est pourquoi la table prévoit les valeurs de 0 à 35°, la première n'étant considérée qu'en vue de l'interpolation.

p.	φ_1.	φ_2.	δ_1.	δ_2.
0°.....	90°,0	0°,0	0′,0	0′,0
5.....	87,5	5,0	2,7	5,4
10.....	84,9	10,2	5,5	10,9
15.....	82,1	15,6	8,5	16,2
20.....	78,9	21,4	11,8	21,2
25.....	75,1	28,0	15,5	25,9
30.....	69,9	36,2	20,2	30,0
35.....	58,1	50,9	27,9	30,6

TABLE III. — *Prismes* Γ_0^2 *à* δ *maximum.* — On donne leur forme, c'est-à-dire p, φ et φ', et leur dédoublement angulaire δ_m. Rappelons qu'il s'agit d'un maximum en valeur absolue, δ étant négatif.

p.	φ.	φ'.	δ_m.
°	°	°	′
25.....	6,5	96,5	—14,2
30.....	8,0	98,0	17,3
35.....	9,6	99,6	20,7
40.....	11,4	101,4	24,2
45.....	13,3	103,3	28,0
50.....	15,4	105,4	32,0
55.....	17,8	107,8	36,3
60.....	20,5	110,5	40,9
65.....	23,6	113,6	—45,8

Les deux chapitres suivants sont consacrés à l'exposition d'un calcul plus précis et de ses applications. Ce calcul a été entrepris à l'origine dans le but d'étudier l'astigmatisme d'un faisceau transmis par un biréfringent et de comparer entre eux, à ce point de vue, quelques prismes courants. Mais on a été amené à en tirer des applications différentes et non moins intéressantes, comme, par exemple, le calcul rigoureux (et pratique, puisque des tables numériques ont été établies) du dédoublement angulaire à toute incidence.

CHAPITRE II.

CALCUL DE LA MARCHE D'UN FAISCEAU HOMOCENTRIQUE DANS QUELQUES BIRÉFRINGENTS.

1. **Problème à résoudre.** — On se propose d'étudier les déformations que subit un faisceau homocentrique en traversant un prisme biréfringent de forme donnée. Il s'agit principalement de caractériser les aberrations du faisceau émergent dans le cas des prismes classiques (Rochon et Wollaston) et du nouveau prisme; dans le présent chapitre, l'extension aux trois dimensions du calcul fait plus haut dans le plan de la section principale sera limitée à des prismes de 45°. Cette valeur de l'angle de coupe constitue d'ailleurs une moyenne courante; en particulier, le nouveau prisme n'existe encore qu'avec cet angle.

En principe, il nous faudra, dans chaque biréfringent, traiter séparément le cas de deux rayons. Comme un rayon donné peut changer de nom au passage par le plan de coupe, nous conviendrons de désigner chacun d'eux, dans toute sa propagation, par le nom qu'il a dans le dernier milieu traversé.

En ce qui concerne le faisceau, nous supposerons que son rayon moyen arrive sur la face d'entrée sous incidence normale; en outre, comme il s'agit du faisceau issu de l'objectif d'une lunette dont le prisme occupe le foyer, nous placerons d'abord le sommet S de ce faisceau à l'intérieur du prisme, à une certaine distance D de la face d'entrée. Il y a intérêt, pour diverses raisons, à former l'image de S à égale distance des deux faces; appelant $2l$ le côté de la section principale de prisme, nous choisirons donc

$$D = \frac{l}{n},$$

mais nous pourrons conserver la notation D sans complication jusqu'aux résultats, et ce sera l'une des généralisations les plus faciles du chapitre suivant que de supposer D quelconque.

Comme les calculs seront assez semblables dans tous les cas, nous éviterons des répétitions en exposant en détail dès maintenant la méthode générale suivie.

2. **Méthode de calcul.** — On considère un rayon quelconque du faisceau et l'on détermine son trajet dans le prisme et sa direction à l'émergence en faisant par le calcul, à chaque réfraction qu'il subit, la construction d'Huyghens correspondante. Ce calcul peut être conduit de façon rigoureuse jusqu'au bout, mais on est obligé d'introduire des

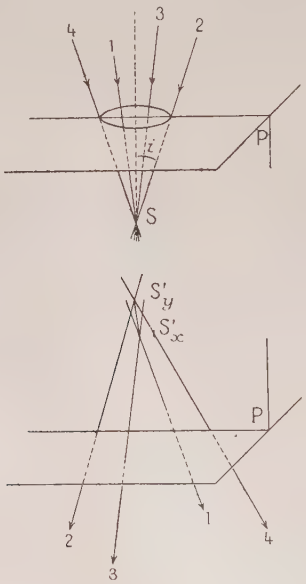

Fig. 39. — Définition de la longueur d'astigmatisme.

quantités auxiliaires et il est généralement impossible d'expliciter les résultats en fonction des seules données. Même sous cette forme, ils permettent, néanmoins, deux applications intéressantes. On peut d'abord les exploiter au moyen d'approximations légitimes; d'autre part, on conserve le bénéfice de leur rigueur en y introduisant directement les valeurs numériques des constantes du quartz et des données. Cette seconde application, qui serait possible d'ailleurs pour tout autre cristal, fera l'objet du chapitre suivant.

Il y a une symétrie évidente par rapport au plan de la section principale qui passe par S. Les directions principales de l'astigmatisme sont donc connues *a priori* et nous considérerons, en particulier, à la fin du calcul, les rayons incidents situés dans les deux plans correspondants; nous choisirons parmi eux les rayons extrêmes, dont l'angle d'incidence

est égal à la demi-ouverture du faisceau de part et d'autre du rayon principal.

Numérotons de 1 à 4, dans l'ordre de la figure 39, les rayons ainsi définis, les rayons 2 et 4 étant ceux du plan de symétrie. Les rayons émergents 2 et 4 sont encore dans ce plan, dont ils ne sont pas sortis durant toute la traversée du prisme; les rayons 1 et 3 émergent symétriquement par rapport à ce plan. Chacun de ces couples de rayons forme une *image* de S, soient S'_x et S'_y. Le segment $S'_x S'_y$ se trouve sur le rayon principal du faisceau émergent, dont l'astigmatisme est mesuré par sa longueur e. L'angle d'émergence de ce rayon sera toujours assez petit pour que nous puissions confondre e avec sa projection sur la normale aux faces du biréfringent. On obtiendra donc finalement e par la différence des hauteurs h_x et h_y des deux images au-dessus de la face de sortie, en posant

$$e = h_x - h_y.$$

Considérons (*fig.* 40) un système d'axes parallèles aux arêtes du prisme, le plan des zy étant celui de la section principale, les y positifs vers

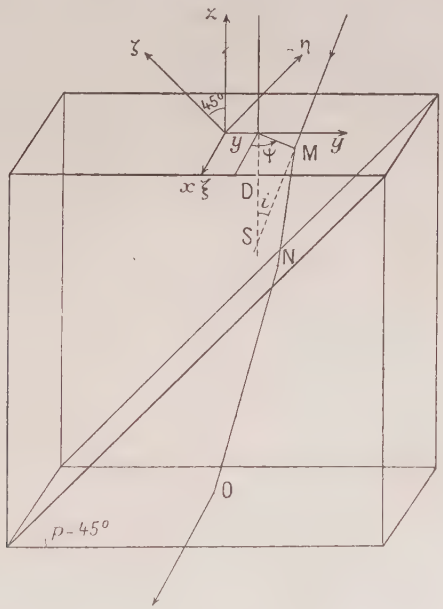

Fig. 40. — Trajet d'un rayon quelconque.

l'angle réfringent du premier milieu, les z positifs dans le sens inverse de la propagation. L'origine sera prise d'abord au centre C de la face d'entrée. Les coordonnées de S seront

$$x = 0, \qquad y = Y, \qquad z = -D.$$

Un rayon incident quelconque est défini par l'angle ψ et son angle d'incidence i; ce dernier sera toujours positif et ψ variera de zéro à 2π.

Nous aurons à utiliser aussi un système $\xi\eta\zeta$ qui se déduit de xyz par une rotation de $+\frac{\pi}{4}$ autour de Cx.

Écrivons encore les coordonnées du point d'entrée M dans le prisme du rayon incident, quantités évidemment communes à tous les cas :

$$M\begin{cases} x = D\,\mathrm{tg}\,i\cos\psi, \\ y = Y + D\,\mathrm{tg}\,i\sin\psi, \\ z = 0. \end{cases}$$

3. **Calcul rigoureux.** — Le but de ce premier calcul est d'obtenir les coordonnées du point d'émergence O et les paramètres directeurs du rayon émergent. Considérons les trois réfractions que le rayon subit successivement en M, N et O. Il est commode de séparer le calcul des paramètres directeurs de segments successifs de celui des coordonnées de leurs extrémités N et O.

a. Calcul des directions. — *Première réfraction* (*fig.* 41). — L'origine est transportée en M. La surface d'onde pour l'air est la sphère de rayon 1.

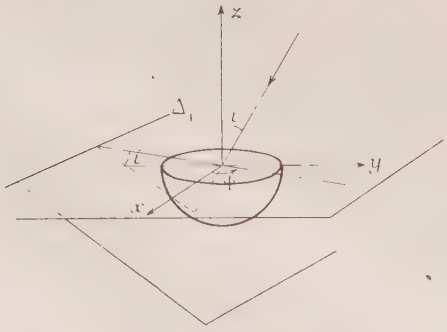

Fig. 41. — Première réfraction. Construction de l'onde incidente.

L'onde plane normale au rayon incident et tangente à cette sphère coupe la surface de séparation suivant une droite Δ_1 perpendiculaire à la projection du rayon incident; l'équation de Δ_1 s'écrit

$$x\cos\psi + y\sin\psi + \frac{1}{\sin i} = 0. \qquad (1)$$

Celle de l'onde réfractée, passant par Δ_1, sera donc de la forme

$$x\cos\psi + y\sin\psi + \alpha z + \frac{1}{\sin i} = 0. \qquad (2)$$

Il nous reste à exprimer qu'elle est tangente à la surface d'onde pour le premier milieu du biréfringent. Suivant le cas, nous en resterons au système *xyz* ou nous passerons à celui des $\xi\eta\zeta$. Appelons provisoirement *a*, *b*, *c* les axes de l'ellipsoïde surface d'onde; deux d'entre eux seront toujours égaux et pour l'onde ordinaire les trois. En raison de la position particulière des axes dans les prismes examinés, l'équation de cette surface sera toujours de la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \qquad \text{ou la même en } \xi\eta\zeta, \tag{3}$$

et celle du plan tangent

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}-1=0 \qquad \text{ou la même en } \xi\eta\zeta \tag{4}$$

et l'on obtient les coordonnées du point de tangence de l'onde réfractée, ainsi que la valeur de α, en identifiant (2) et (4). Ces coordonnées ou tout autre groupe de quantités proportionnelles sont les paramètres directeurs du rayon réfracté, soient l_1, m_1, n_1.

Seconde réfraction. — L'origine est en N. L'équation (2) devient celle de l'onde incidente. On l'écrit dans le système $\xi\pi\zeta$ et l'on y fait $\zeta=0$ pour avoir l'équation de son intersection Δ_2 avec le plan de coupe dans ce plan. Ce calcul se présente comme suit :

$$\xi\cos\psi+\frac{\eta-\zeta}{\sqrt{2}}\sin\psi+\frac{\eta+\zeta}{\sqrt{2}}\alpha+\frac{1}{\sin i}=0, \tag{2 bis}$$

d'où, pour $\zeta=0$ (Δ_2),

$$\xi\cos\psi+\eta\frac{\alpha+\sin\psi}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sin i}=0. \tag{5}$$

L'onde réfractée passe par Δ_2; son équation peut donc s'écrire

$$\xi\cos\psi+\eta\frac{\alpha+\sin\psi}{\sqrt{2}}+\beta\zeta+\frac{1}{\sin i}=0, \tag{6}$$

ou en revenant au système *xyz* qui servira évidemment pour la troisième réfraction

$$x\cos\psi+y\frac{\alpha+\sin\psi-\beta\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+z\frac{\alpha+\sin\psi+\beta\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sin i}=0. \tag{7}$$

Le plan tangent à la surface d'onde a une équation de la forme (4); en l'identifiant avec (6) ou (7), suivant le cas, on obtient les coordonnées du point de contact de l'onde réfractée avec cette surface, d'où les paramètres directeurs l_2, m_2, n_2 du rayon deux fois réfracté et la valeur de β.

Troisième réfraction. — L'origine est en O; l'équation (6) ou (7) devient celle de l'onde incidente. On y fait $z = 0$ pour obtenir celle de son intersection Δ_3 avec la face de sortie, soit

$$x\cos\psi + y\frac{\alpha + \sin\psi - \beta\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sin i} = 0. \tag{8}$$

L'onde réfractée, qui est cette fois l'onde émergente, passe par Δ_3 et son équation s'écrit

$$x\cos\psi + y\frac{\alpha + \sin\psi - \beta\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \gamma z + \frac{1}{\sin i} = 0. \tag{9}$$

On obtient ici directement les paramètres directeurs du rayon émergent puisque, se propageant dans l'air, il est normal à l'onde; on a donc

$$\begin{aligned} l_3 &= \cos\psi, \\ m_3 &= \frac{\alpha + \sin\psi - \beta\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \\ n_3 &= \gamma, \end{aligned}$$

quantités (1) dont l'écriture est commune à tous les cas; la différence, non apparente, sera dans les valeurs de α, β et γ. Exprimons γ en fonction de α, β et ψ. La surface d'onde est la sphère de rayon 1; le plan tangent a pour équation

$$xx' + yy' + zz' - 1 = 0. \tag{10}$$

Identifiant avec (9), on obtient, pour le point de contact

$$\begin{aligned} x_3 &= -l_3\sin i, \\ y_3 &= -m_3\sin i, \\ z_3 &= -n_3\sin i. \end{aligned}$$

Ce sont d'ailleurs les cosinus directeurs du rayon émergent, puisque ce point est sur la sphère de rayon 1. On a donc

$$(l_3^2 + m_3^2 + n_3^2)\sin^2 i = 1,$$

d'où, pour γ qui est égal à n_3 :

$$\gamma = \frac{1}{\sin i}\sqrt{1 - \sin^2 i\left[\cos^2\psi + \frac{1}{2}(\alpha + \sin\psi - \beta\sqrt{2})^2\right]},$$

valeur qui s'écrit de même dans tous les cas.

---

(1) La notation γ, qui s'introduit ici tout naturellement, ne saurait produire de confusion avec la constante, inverse du grandissement g, dont il ne sera d'ailleurs pas question dans tout ce calcul.

On voit que le calcul rigoureux de la troisième réfraction est ainsi entièrement fait pour tous les cas.

L'angle d'émergence peut être donné par

$$\sin i' = \sqrt{\frac{l_3^2 + m_3^2}{l_3^2 + m_3^2 + n_3^2}} = \sqrt{l_3^2 + m_3^2}\,\sin i.$$

b. Calcul des points. — Il s'agit de déterminer les coordonnées du point d'émergence à partir de celles du point d'incidence et des paramètres directeurs des segments MN et NO. On peut écrire

$$\text{O}\begin{cases} x_3 = x_1 + \rho_1 l_1 + \rho_2 l_2, \\ y_3 = y_1 + \rho_1 m_1 + \rho_2 m_2, \\ z_3 = z_1 + \rho_1 n_1 + \rho_2 n_2. \end{cases}$$

Déterminons ρ_1 et ρ_2; le point

$$\text{N}\begin{cases} x_2 = x_1 + \rho_1 l_1, \\ y_2 = y_1 + \rho_1 m_1, \\ z_2 = z_1 + \rho_1 n_1 \end{cases}$$

se trouve dans le plan de coupe; on doit donc avoir

$$z_2 - y_2 + l = 0,$$

ce qui donne

$$\rho_1 = \frac{y_1 - z_1 - l}{n_1 - m_1} = \frac{\text{D}\,\text{tg}\,i\,\sin\psi + y - l}{n_1 - m_1}.$$

Pour calculer ρ_2, on écrit que le point O est sur la face de sortie, c'est-à-dire que

$$z_2 = -2l,$$

d'où

$$\rho_2 = -\frac{\rho_1 n_1 + 2l}{n_2}.$$

Ce calcul lui aussi est évidemment commun à tous les cas sous cette forme générale. Il n'y a aucun intérêt à introduire les valeurs de ρ_1, de ρ_2 et des six paramètres directeurs pour expliciter en partie les résultats; en effet, on serait encore arrêté par les valeurs de α, β et γ qui sont également particulières à chaque cas et qui mènent à des formules trop compliquées. Nous ne distinguerons donc les différents cas envisagés qu'en ce qui concerne le calcul des directions.

4. **Suite. Calcul approché.** — Le calcul approché commence exactement où s'arrête le précédent. On calcule d'abord α et β, puis x_3 et y_3 terme par terme. On passe ensuite à la détermination de e par la méthode exposée plus haut et sur laquelle nous allons revenir.

a. Approximations. — Les quantités que nous considérerons comme petites seront la biréfringence ε et l'incidence i.

La première est une constante du cristal; nous avons vu qu'en valeur relative (c'est-à-dire rapportée à l'indice ordinaire n), elle vaut environ 0,006 dans le cas du quartz. Pour le spath, par contre, elle s'élève à 0,11; en la supposant petite, nous éliminons donc ce second cas. Il ne serait pas logique d'ailleurs de considérer des prismes de même forme ($p = 45°$) en quartz et en spath. A égalité de constantes et aussi (comme on le verra plus loin) d'aberrations, l'angle de 45° pour un biréfringent en quartz correspond à 3°,2 seulement pour un biréfringent en spath. C'est pourquoi, s'il est vrai que le calcul rigoureux est valable pour n'importe quelle valeur de la biréfringence, cela n'aura d'intérêt que lorsque nous l'étendrons à un angle de coupe quelconque.

L'angle d'incidence a pour valeur maximum la demi-ouverture angulaire du faisceau, c'est-à-dire dans notre cas la moitié du rapport d'ouverture de l'objectif. Ce rapport est généralement voisin de 1/15; l'incidence i ne dépasse donc pas 2° environ.

Il en résulte, toutefois, que nous ne pourrons pas négliger i^2 qui représente une fraction importante de ε, alors que ε^2 est toujours négligeable; de sorte que nous ne traiterons pas i et ε comme des infiniment petits de même ordre. Nous conserverons finalement, outre les termes en i et en ε, ceux en i^2 et les termes mixtes en εi. Donnons ici les valeurs approchées de ces termes par rapport à ε pour la valeur maximum de i supposée égale à 2° :

$$i = 4\varepsilon; \qquad i^2 = \frac{\varepsilon}{8}; \qquad \varepsilon i = \frac{\varepsilon}{30}.$$

Indiquons enfin l'expression approchée de quelques quantités qui se présentent à tout moment dans les calculs :

$$\frac{b}{a} = 1 - \frac{\varepsilon}{n}, \qquad \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{2\varepsilon}{n}, \qquad \frac{a}{b} = 1 + \frac{\varepsilon}{n}, \qquad \frac{a^2}{b^2} = 1 + \frac{2\varepsilon}{n}.$$

Nous poserons, en outre,

$$A = a^2 + b^2 = 2a^2\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right), \qquad B = a^2 - b^2 = 2a^2\frac{\varepsilon}{n}.$$

b. Méthode. — Nous avons déjà indiqué le principe de la méthode utilisée pour obtenir e. Montrons maintenant comment ce calcul s'effectue à partir des éléments fournis par le calcul rigoureux. Considérons un rayon émergent quelconque défini par ses traces S' (O, Y_s, $z_3 + h$) sur le plan de symétrie et O (x_3, y_3, z_3) sur la face de sortie (*fig.* 42). On peut écrire les projections du vecteur S'O sous la forme

$$\Delta x = \lambda l_3; \qquad \Delta y = \lambda m_3; \qquad \Delta z = \lambda n_3,$$

d'où

$$\Delta z = \Delta x \frac{n_3}{l_3} = \Delta y \frac{n'}{m'}.$$

Or, nous avons

$$\Delta x = x_3, \qquad \Delta y = y_3 - y_{S'}, \qquad \Delta z = -h,$$

d'où un moyen de calculer h_x $(\psi = 0)$ et h_y $\left(\psi = \frac{\pi}{2}\right)$.

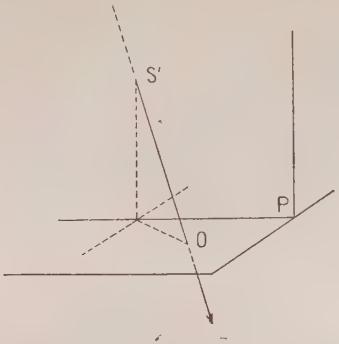

Fig. 42. — Définition d'un rayon émergent quelconque par ses traces dans le plan médian et dans la face de sortie.

Pour h_x, la formule est très simple; S' est l'*image* S'_x et l'on a

$$h_x = -(x_3)_0 \left(\frac{n_3}{l_3}\right)_0,$$

où l'indice des parenthèses est relatif à la valeur de ψ.

Pour h_y, on est arrêté par y'_s, qui est inconnu; mais on tourne la difficulté en considérant les deux rayons émergents $2\left(\psi = \frac{\pi}{2}\right)$ et $4\left(\psi = \frac{3\pi}{2}\right)$ et en éliminant y'_s par différences. Ces rayons sont généralement dissymétriques par rapport à la normale à la face de sortie, soit S'_y H (*fig.* 43). On peut écrire

$$HO_2 = -h_y \left(\frac{m_3}{n_3}\right)_{\frac{\pi}{2}}, \qquad HO_4 = -h_y \left(\frac{m_3}{n_3}\right)_{\frac{3\pi}{2}},$$

d'où

$$O_2 O_4 = h_y \left[\left(\frac{m_3}{n_3}\right)_{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{m_3}{n_3}\right)_{\frac{3\pi}{2}}\right],$$

ou

$$y_{\frac{3\pi}{2}} - y_{\frac{\pi}{2}} = h_y \left[\left(\frac{m_3}{n_3}\right)_{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{m_3}{n_3}\right)_{\frac{3\pi}{2}}\right].$$

En réalité, au lieu de faire le calcul pour les deux valeurs de l'azimut ψ, on conserve la première et l'on change i en $-i$, ce qui revient au même et se fait plus simplement, évitant de remonter dans le calcul jusqu'au point où l'on avait donné une valeur particulière à ψ.

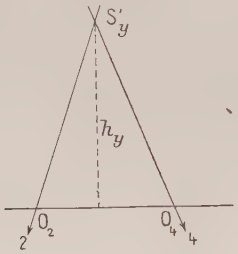

Fig. 43. — Calcul de h_y.

On peut donc écrire h_y sous la forme suivante, où le symbole Δ se rapportera à l'intervalle $(-i, +i)$:

$$h_y = -\frac{\Delta(y_3)_{\frac{\pi}{2}}}{\Delta\left(\frac{m_3}{n_3}\right)_{\frac{\pi}{2}}}.$$

Le calcul est un peu plus simple dans les cas où il y a symétrie aussi en y, c'est-à-dire quand le rayon moyen du faisceau dont on étudie le rayon d'incidence i émerge normalement. Soit O, sans indice, son point d'émergence; dans ce cas, O vient en H et l'on a

$$HO_2 = HO_4 = OO_2 = OO_4.$$

Or, l'abscisse du point O s'obtient en faisant $i = 0$ dans y_3; on pourra donc exprimer h_y sous la forme

$$h_y = \left[(y_3)_{\frac{\pi}{2}} - (y_3)_0\right]\left(\frac{n_3}{m_3}\right)_{\frac{\pi}{2}},$$

où la quantité entre crochets ne sera autre que l'ensemble des termes en i de y_3.

5. **Cas classiques.** — *a. Calcul rigoureux.* — Pour appliquer aux trois biréfringents classiques la méthode exposée plus haut, il suffit de remplacer, dans les équations de la surface d'onde et du plan tangent, les demi-axes a, b, c par les valeurs qui correspondent à chacune des réfractions des deux rayons. Suivant le cas, on écrira ces équations en xyz ou en $\xi\eta\zeta$ et il faudra tenir compte du changement de nom des rayons à la traversée du plan de coupe dans le Rochon et le Wollaston.

On aura toujours le demi-axe a suivant l'axe cristallographique du milieu considéré; quand, dans ce milieu, le rayon est ordinaire, on aura la sphère $(a\,a\,a)$.

On obtient ainsi, à la place de a, b, c, les groupes de valeurs

Prisme.	Rayon.	Système.	Réfractions. Première.	Deuxième.
Muller	o	xyz	$a\,a\,a$	$a\,a\,a$
	e	$\xi\eta\zeta$	$b\,a\,b$	$b\,b\,a$
Rochon	o	xyz	$b\,b\,a$	$a\,a\,a$
	e	xyz	$a\,a\,a$	$a\,b\,b$
Wollaston	o	xyz	$b\,a\,b$	$a\,a\,a$
	e	xyz	$a\,a\,a$	$a\,b\,b$

Voici maintenant, écrites sous leur forme la plus commode, les valeurs que l'on trouve pour les paramètres α et β :

Prisme.	Rayon.	$\alpha \sin i.$
M.....	o	$\frac{1}{a}\sqrt{1-a^2\sin^2 i}$
	e	$-\frac{B}{A}\sin\psi+\frac{1}{A}\sqrt{2A-2b^2\sin^2 i(2a^2\sin^2\psi+A\cos^2\psi)}$
R.....	o	$\frac{1}{a}\sqrt{1-b^2\sin^2 i}$
	e	$\frac{1}{a}\sqrt{1-a^2\sin^2 i}$
W.....	o	$\frac{1}{b}\sqrt{1-\sin^2 i(a^2\sin\psi+b^2\cos^2\psi)}$
	e	$\frac{1}{a}\sqrt{1-a^2\sin^2 i}$

Prisme.	Rayon.	$\beta\sqrt{2}\sin i.$
M.....	o	$\frac{1}{a}\sqrt{2-a^2\sin^2 i[(\alpha+\sin\psi)^2+2\cos^2\psi]}$
	e	$\frac{1}{a}\sqrt{2-b^2\sin^2 i[(\alpha+\sin\psi)^2+2\cos^2\psi]}$
R.....	o	$\frac{1}{a}\sqrt{2-a^2\sin^2 i[(\alpha+\sin\psi)^2+2\cos^2\psi]}$
	e	$\frac{1}{b}\sqrt{2-\sin^2 i[b^2(\alpha+\sin\psi)^2+2a^2\cos^2\psi]}$
W.....	o	$\frac{1}{a}\sqrt{2-a^2\sin^2 i[(\alpha+\sin\psi)^2+2\cos^2\psi]}$
	e	$\frac{1}{b}\sqrt{2-\sin^2 i[b^2(\alpha+\sin\psi)^2+2a^2\cos^2\psi]}$

b. Calcul approché. — Exprimons α et β en fonction de n, ε et i en faisant les approximations définies plus haut; ce calcul ne présente aucune difficulté essentielle.

Nous pouvons alors poursuivre et obtenir successivement les coordonnées de N et de O ainsi que les paramètres directeurs des segments MN. et NO et, finalement, du rayon émergent; cela pour $\psi = 0$ et $\psi = \frac{\pi}{2}$. Comme pour chacune de ces valeurs l'une des coordonnées s'annule, on calcule, en fait,

$$(x_3)_0 \quad \text{et} \quad (y_3)_0.$$

Nous allons calculer h (mais sans avoir recours à la méthode générale) dans le but suivant. Il est utile de connaître la hauteur moyenne

$$h = \frac{1}{2}(h_x + h_y),$$

car la longueur d'astigmatisme e de chaque faisceau ne suffit pas à définir les qualités du prisme; il faut encore que les deux images ne se forment pas dans des plans trop différents, afin d'être au point en même temps dans l'oculaire. Nous caractériserons donc chaque prisme :

1° par les valeurs de e dans les deux faisceaux;
2° par la distance des plans des images $\Delta h = h_e - h_o$.

Le calcul de e est tout à fait dans le cas du rayon ordinaire traversant le nouveau prisme, puisque ce dernier se comporte à son égard comme une lame isotrope d'indice n. Il y a donc symétrie de révolution autour du rayon incident normal et l'on peut affirmer *a priori* que le faisceau émergent sera dépourvu d'astigmatisme ($e = 0$). Pour une valeur donnée de i, la hauteur de l'image S′ au-dessus de la face de sortie sera unique et indépendante de ψ; sa variation avec i traduira une aberration de sphéricité.

Calculons maintenant h_o.

Nous avons défini la position de S par

$$D = \frac{l}{n} \quad (\textit{fig. } 44).$$

La première image de S se trouvera à la distance

$$D' = D\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r},$$

d'où, par le même calcul à la face de sortie,

$$h_0 = (2l - D')\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i} = 2l\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i} - D.$$

Nous écrirons

$$\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i} = \frac{\sin r \cos i}{\cos r \sin i} = \frac{1}{n}\frac{1 - \frac{i^2}{2}}{1 - \frac{r^2}{2}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{i^2 - r^2}{2}\right) = \frac{1}{n}\left[1 - \frac{i^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right],$$

d'où

$$h = \frac{l}{n} - l\frac{i^2}{n}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Le terme principal est celui que nous retrouverons dans tous les cas. Il est intéressant de constater que ce terme serait seul modifié si on laissait D quelconque, ce qui représenterait un déplacement d'ensemble du faisceau; la constitution de ce dernier est donc indépendante de D.

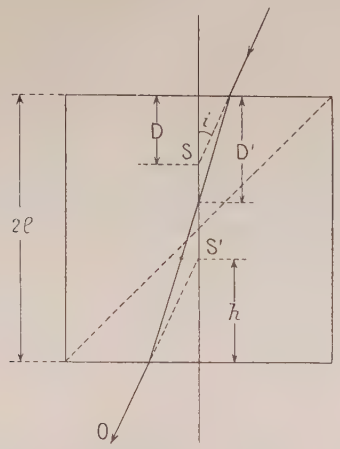

Fig. 44. — Trajet du rayon ordinaire dans le prisme de Muller.

Dans les cinq autres cas, on calcule $(x_3)_0$ et $(y_3)_{\frac{\pi}{2}}$; ils se réduisent d'ailleurs à quatre cas distincts seulement, car le rayon extraordinaire se propage exactement de même dans le Rochon et dans le Wollaston; en effet, le rayon est ordinaire dans le premier milieu qui est le seul où la position de l'axe cristallographique diffère pour ces deux biréfringents.

Donnons ci-dessous le résultat de ce premier calcul :

Rayon.	$(x_3)_0$.	$(y_3)_\pi$.
M_e.....	$-l\frac{i}{n}+3l\frac{\varepsilon i}{n^2}$	$Y+\frac{2\varepsilon}{n}Y-l\frac{i}{n}+\frac{\varepsilon i}{n^2}(4Y+3l)$
R_o.....	$-l\frac{i}{n}-\frac{2\varepsilon i}{n^2}(Y-l)$	$Y-l\frac{i}{n}-\frac{2\varepsilon i}{n^2}(Y-l)$
$R_e W_e$.....	$-l\frac{i}{n}-\frac{\varepsilon i}{n^2}(Y+l)$	$Y+\frac{\varepsilon}{n}(Y+l)-l\frac{i}{n}+\frac{\varepsilon i}{n^2}(3Y+2l)$
W_o.....	$-l\frac{i}{n}-\frac{\varepsilon i}{n^2}(Y-l)$	$Y-\frac{\varepsilon}{n}(Y+l)-l\frac{i}{n}-\frac{\varepsilon i}{n^2}(Y+2l)$

Signalons, avant de poursuivre le calcul, que les valeurs de $(y_3)_{\frac{\pi}{2}}$ nous permettent de retrouver deux des résultats obtenus au chapitre précédent par la méthode simple :

1° la valeur de la constante $\gamma=\frac{1}{g}$.

Faisant, en effet, $i = 0$, on obtient les abscisses d'émergence des deux rayons issus du rayon incident normal d'abscisse Y et l'on a, par définition,

$$\gamma = \frac{d[(\gamma_3)_e - (\gamma_3)_o]}{dY}.$$

2° la variation de δ avec i aux environs de $i = 0$.

Si on laisse à i une valeur quelconque, on trouve l'expression correspondante de δ, où le coefficient du terme en i représente $\left(\frac{\partial\delta}{\partial i}\right)_0$.

Ceci dit, passons au calcul de e pour chaque rayon et de $h_e - h_o$ pour chaque biréfringent. Nous désignerons désormais par i l'incidence extrême, égale à la demi-ouverture du faisceau incident; d'ailleurs i disparaîtra dans la plupart des résultats que nous trouverons pour e ou $h_e - h_o$.

Nous avons déjà écrit la valeur de h_o pour le prisme de Muller. Dans tous les autres cas, il est commode d'introduire, dans les expressions de e comme de $h_e - h_o$, une quantité qui se retrouve partout en facteur :

$$E = \frac{2l\varepsilon}{n^2} \# \frac{l}{130}.$$

Dans les différences $h_e - h_o$, le terme en i^2 ne disparaît pas pour le prisme de Muller, mais celui qui subsiste dans ce cas est petit. En effet, on trouve, en faisant la différence des termes en i dans h_e et dans h_o,

$$l\frac{i^2}{2n}\left(2 - \frac{2}{n^2} - 1\right) = l\frac{i^2}{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{l\varepsilon}{8n}\,0{,}081 = 0{,}008\,E.$$

Dans le seul cas où le terme en i^2 ne soit pas nul, il représente donc une très petite fraction de E; or, les valeurs de e comme de $h_e - h_o$ sont de l'ordre de E qui est notamment leur valeur moyenne ($Y = 0$) commune lorsqu'elle n'est pas nulle. On peut donc négliger le terme en i^2 propre à ce cas et écrire

Prisme.		h.	e.	$h_e - h_o$.
M	e....	$\frac{l}{n} - E\left(1 + \frac{Y}{l}\right) - l\frac{i^2}{2n}$	$-E\left(1 - 2\frac{Y}{l}\right)$	$-E\left(1 + \frac{Y}{l}\right)$
	o....	$\frac{l}{n} - l\frac{i^2}{n}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$	0	
R	e....	$\frac{l}{n} - E\frac{Y}{2l} - l\frac{i^2}{2n}$	$-E\left(1 + \frac{Y}{2l}\right)$	$E\left(1 - \frac{3Y}{2l}\right)$
	o....	$\frac{l}{n} - E\left(1 - \frac{Y}{l}\right) - l\frac{i^2}{2n}$	0	
W	e....	$\frac{l}{n} - E\frac{Y}{2l} - l\frac{i^2}{2n}$	$-E\left(1 + \frac{Y}{2l}\right)$	$-E\frac{Y}{l}$
	o....	$\frac{l}{n} + E\frac{Y}{2l} - l\frac{i^2}{2n}$	$-E$	

Nous pouvons, dès maintenant, tirer quelques conclusions de ces premiers résultats. Étant donné l'usage qui est fait du prisme, il s'agit d'examiner l'influence des variations de Y (effet des déplacements du biréfringent) sur les aberrations. On voit qu'on aura :

1° sur chaque image extraordinaire, une variation de l'astigmatisme;
2° une variation de la distance des plans des deux images.

En principe, on utilise la totalité de la course du prisme, généralement limitée par ses dimensions; nous admettrons donc que, dans la pratique, sa position moyenne correspond à Y = o. Représentons les variations de e pour chacun des six rayons et de $h_e - h_o$ pour chacun des trois prismes, quand Y varie de $-l$ à $+l$ (*fig.* 45).

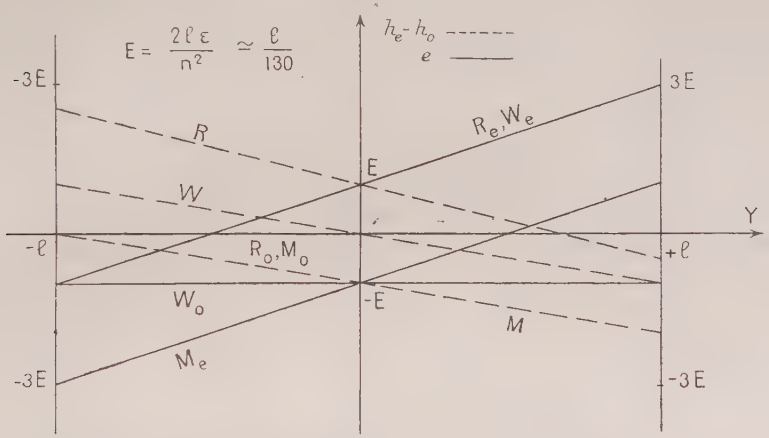

Fig. 45. — Variation de e (longueur d'astigmatisme) pour chaque faisceau et de $h_e - h_o$ (distance des plans où se forment les deux images) pour chaque prisme, quand Y varie de $-l$ à $+l$, soit dans la course totale du prisme. Le tirage de ce dernier est supposé tel que $n\,D = l$. Prisme M, R et W de 45°.

On voit que l'aberration est, en somme, la même pour les prismes M et R; nulle pour le rayon ordinaire, elle varie pour le rayon extraordinaire dans les mêmes limites, au signe près. Par contre, la distance des plans des deux images atteint une limite légèrement supérieure dans le R. Pour ces deux prismes, d'ailleurs, la comparaison à angle égal que nous faisons n'est pas pleinement significative; le R de 45° donne un grandissement double de celui d'un M ou d'un W de même forme et l'on sait que l'avantage est aux petits grandissements qui, seuls, assurent une course suffisante. Il faudrait donc comparer le M de 45° au R de même grandissement, qui aurait environ 55° et donnerait (ainsi que nous le verrons plus loin) des aberrations doubles de celles que nous trouvons pour 45°.

Le Wollaston donne une aberration constante pour le rayon ordinaire, et pour l'extraordinaire la même que le R; nous avons déjà montré que ces deux cas étaient à tous points de vue identiques. Les plans des deux images, par contre, sont plus voisins que dans les deux autres prismes.

Remarquons que, dans tous les cas, la valeur moyenne de e ne peut être que o ou $\pm$ E.

CHAPITRE III.

APPLICATIONS.

La méthode exposée dans le chapitre précédent permet d'étudier les problèmes les plus divers relativement à la propagation d'un faisceau dans un biréfringent. Donnons les applications suivantes, allégées de tous les calculs qui ne sauraient trouver place ici.

1. **Étude du faisceau émergent.** — On peut calculer, pour chaque rayon incident (ψ, i), les éléments (ψ', i') du rayon émergent rapportés non à un système parallèle, mais plus généralement au plan de symétrie et au rayon principal. C'est donc la structure du faisceau émergent autour de son rayon principal que nous cherchons à caractériser par les aberrations

$$\Delta\psi = \psi' - \psi - \pi,$$
$$\Delta i = i' - i.$$

Ce calcul conduit entre autres à retrouver d'une autre manière le taux de la variation de δ avec l'incidence, que nous avions déjà vérifié dans les calculs du chapitre précédent; il suffit, ici, de faire la différence des déviations Δi pour les deux rayons issus d'un même rayon incident pris dans la section principale $\left(\psi = \frac{\pi}{2}\right)$.

Les résultats sont les suivants :

Les aberrations sont nulles dans les deux cas déjà reconnus pour être les plus simples (M_o et R_o); en outre, elles ont des valeurs comparables dans tous les cas, grâce au fait de les avoir rapportées au rayon principal du faisceau. Il y a donc toujours une certaine symétrie, mais :

a. pour M_o, R_o et M_e, cette symétrie est autour de l'axe du faisceau incident, donc autour de l'axe optique de la lunette;

b. pour R_e, W_e et W_o, elle est autour d'un axe incliné de 31′ environ sur cet axe optique.

De là, sans doute, l'ordre de succession M, R, W indiqué par l'expérience au point de vue de la qualité des images transmises.

On peut étudier d'autres caractères encore du faisceau émergent notamment la trace sur la face de sortie des rayons émergents issus d'un cône incident de demi-ouverture i. On trouve des ellipses concentriques d'axes xx' et yy', de dimensions proportionnelles à i, dont l'aplatissement est de l'ordre de $\frac{\varepsilon}{n}$ et varie avec Y. Dans certains cas, et pour certaines valeurs de Y dans tous les cas, ces ellipses se réduisent à des cercles.

2. **Généralisations.** — Les calculs effectués sur les prismes M, R, W de 45° se prêtent à des généralisations très variées. La première et la plus immédiate consiste à prendre une valeur quelconque de D que nous avions toujours supposé égal à $\frac{l}{n}$; c'est un calcul fort utile, car, en pratique, on devra considérer tous les tirages possibles autour de cette valeur. On peut encore étendre le calcul à d'autres prismes afin de vérifier notamment l'influence de l'angle de coupe sur les aberrations; il faut comprendre, dans cette catégorie de généralisations, l'étude des prismes M, R, W retournés.

A. Valeur quelconque de D. — Remarquons d'abord que le calcul des directions reste valable; on connaît donc les valeurs des paramètres directeurs.

On trouvera plus haut le calcul relatif au cas M_o, où il suffit de laisser à D une valeur quelconque; on conservera la définition de h_o. Pour les autres prismes, le terme en i^2 sera toujours le même dans h_e et dans h_o et disparaîtra dans la différence, ce qui permet de ne pas préciser cette définition.

On trouve, dans les expressions de h_e et h_o, les trois termes habituels. Le terme principal et le coefficient de $\frac{i^2}{2}$ sont égaux et ont pour valeur commune

$$2l - nD,$$

sauf dans le cas du prisme de Muller, où le terme en i^2 de h_o a la même expression particulière que plus haut. Il est donc possible d'annuler l'aberration de sphéricité en prenant

$$D = 2l,$$

c'est-à-dire en formant l'image sur la face de sortie. Toutefois, cette valeur n'est pas, en général, la plus avantageuse du point de vue de l'astigmatisme.

Quant au terme en E, sa valeur montre que, dans e comme dans $h_e - h_o$, le coefficient de Y est indépendant de D; l'amplitude de leurs variations reste donc celle que nous avons trouvée pour $D = \frac{l}{n}$ (*fig.* 45).

Par contre, on peut tenter, en jouant sur D, d'améliorer, à défaut des amplitudes, les valeurs moyennes obtenues en faisant Y = o. Représentons donc ces valeurs moyennes, en fonction de nD qui est une variable plus commode que D (*fig.* 46).

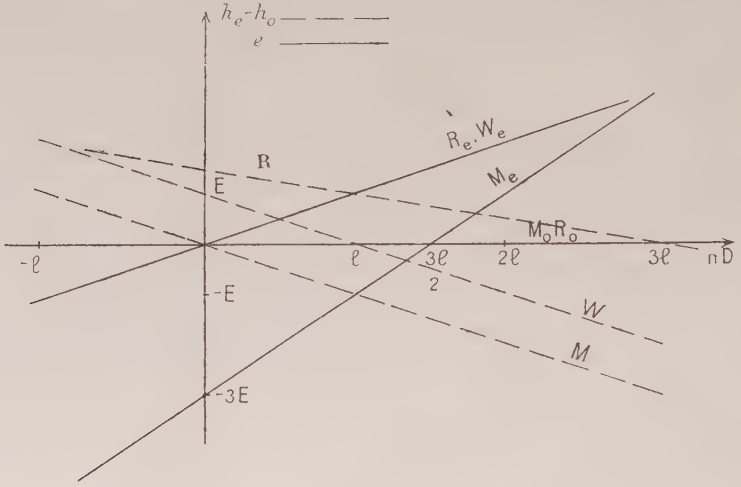

Fig. 46. — Variations des valeurs moyennes (Y = o, prisme à mi-course) de e et de $h_e - h_0$ avec le tirage du prisme, la face d'entrée étant à une distance D en avant du sommet du faisceau incident. Prismes M, R et W de 45°. On voit que le tirage moyen n D = l constitue un optimum d'où l'on ne peut s'écarter sans perdre, soit sur la qualité des images, soit sur leur différence de mise au point.

Le tracé de e pour le rayon W_o se confond avec celui de $h_e - h_o$ (tirets) pour le prisme M.

Considérant à la fois les valeurs de e (pour les six rayons) et de $h_e - h_o$ (pour les trois prismes) pour une valeur donnée de n D, on voit que les aberrations sont bien les plus petites aux environs de n D = l. Dans le cas du R et du W, elles sont encore acceptables pour des valeurs inférieures et jusque vers D = o; mais alors les plans des deux images commencent à s'écarter sensiblement.

B. Valeur quelconque de p. — *a. Nouvelles définitions.* — La définition du Rochon ou du Wollaston pour un angle de coupe p quelconque n'a rien de nouveau, les axes étant normaux à une face ou au plan de la section principale, quelle que soit l'orientation du plan de coupe. Il n'en est pas de même dans le cas du prisme de Muller qui est susceptible de deux définitions, équivalentes seulement pour $p = 45°$ et qu'il est intéressant de considérer toutes deux dans le cas général :

Prisme M *type* A. — Les axes sont à 45° des faces (*fig.* 47 *a*). Le dédoublement δ est toujours nul; la constante γ dépend de p par le facteur tg p, mais constitue un minimum relatif parmi les prismes à δ nul d'angle p.

Prisme M *type* B. — Les axes sont symétriques par rapport aux plans des faces, le premier étant en outre parallèle au plan de coupe (*fig.* 47 *b*); c'est donc le prisme de second genre défini par

$$\varphi = p; \qquad \varphi' = \pi - p,$$

δ est nul; γ dépend de p à la fois par le facteur tg p et par le terme où interviennent φ et φ'.

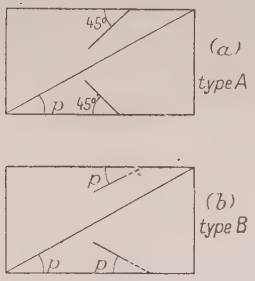

Fig. 47. — Les deux définitions possibles du prisme de Muller pour une valeur quelconque de p.

b. Calculs. — Les calculs sont parfois assez longs et nous ne les reproduirons pas ici; donnons néanmoins quelques indications générales à leur sujet.

On suit étroitement la marche exposée plus haut dans le cas de $p = 45°$. La première réfraction reste évidemment inchangée; pour le passage par le plan de coupe, on est amené à faire tourner le système *xyz* non plus de 45°, mais de p; d'où l'apparition et l'usage d'expressions en sin p et cos p, dues aux formules de passage, dans les paramètres directeurs. Ces termes s'introduisent d'ailleurs de façon simple et il se produit des simplifications importantes. Nous aurons l'occasion d'appliquer certains résultats de ce calcul dans l'établissement de tables numériques.

c. Résultats. — Les expressions que l'on trouve pour les aberrations e et $h_e - h_o$ montrent que :

1° les valeurs moyennes (Y = o) de ces quantités sont indépendantes de p; mais leur amplitude de variation dans l'étendue de la course augmente comme tg p (M type A), $\sin^2 p$ (R) ou $\mathrm{tg}^2 p$ (W). Le Wollaston est donc nettement inférieur au Rochon, même à grandissement égal (l'angle du Rochon étant alors plus grand que celui du Wollaston). Les aberrations du prisme de Muller croissent moins vite.

En règle générale, l'avantage est toujours aux prismes de petit angle.

2° Le prisme M type B constitue une exception; en effet, il tend vers la lame à faces parallèles aussi bien quand p tend vers 90° que pour

sa limite inférieure 0°. L'angle des deux axes est maximum pour $p = 45°$ et, au delà de cette valeur, le coefficient d'aberration ne croît plus que lentement jusque vers $p = 70°$, puis décroît rapidement et change de signe. L'intérêt de cette particularité est évidemment diminué par le fait que vers les grands angles la constante γ, elle aussi, tend vers celle de la lame à faces parallèles qui est nulle.

La différence essentielle entre le R et le W vient du fait que le premier milieu traversé conserve au faisceau émergent ordinaire une symétrie de révolution dans le R, mais non dans le W, étant donnée la position de l'axe dans ce milieu pour les deux prismes. Le second milieu présente ensuite les mêmes propriétés dans l'un et dans l'autre et sa traversée ne peut amener une compensation des effets du premier sur la structure du faisceau.

C. Étude d'autres prismes. — Une autre généralisation des calculs sera leur extension au cas de prismes analogues à ceux que nous avons envisagés jusqu'ici. Si l'on ne considère que les plus simples, où les deux axes ne peuvent être que dans le plan de la section principale ou suivant sa normale, on constate qu'il ne reste qu'un seul prisme nouveau et les précédents retournés.

Nous continuerons à ne généraliser que par rapport à un seul des éléments à la fois, en nous limitant ici à la forme $p = 45°$. Nous admettrons que nos conclusions, en particulier au sujet des prismes retournés restent valables au moins qualitativement pour la plupart des prismes courants, dont l'angle s'écarte assez peu de cette valeur.

a. Troisième biréfringent. — Nous avons défini plus haut (p. 63) ce prisme; nous considérerons ses deux formes, qui sont équivalentes à l'emploi d'un seul et même prisme en position directe et retournée (*fig.* 48).

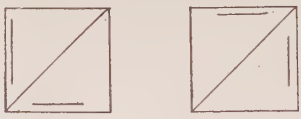

Fig. 48. — Formes du troisième biréfringent.

La propagation du rayon ordinaire, lequel ne change plus de nom, est donc exactement la même que dans le M; celle du rayon extraordinaire commence, dans le premier milieu, par être identique à ce qu'elle est dans le R ou dans le W. Il ne reste donc à calculer que la seconde réfraction et l'émergence, par la méthode habituelle; négligeant encore le terme en i^2 qui subsiste dans $h_e - h_o$, on trouve :

1° pour l'astigmatisme dans les deux formes :

Rayon extraordinaire : $e = -E$, rayon ordinaire : $e = 0$;

2° pour la distance des plans des images respectivement :

$$h_e - h_0 = -E\left(1 - \frac{Y}{2l}\right) \quad \text{et} \quad -E\left(1 + \frac{Y}{2l}\right).$$

Les aberrations ont même valeur moyenne ou sont nulles; la première est constante dans tous les cas. La seconde varie entre les limites

$$-\frac{3}{2}E \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2}E$$

relativement étroites si on les compare à celles trouvées dans les autres cas.

Ce biréfringent, avec les constantes d'un Rochon, altère donc nettement moins les images et devra lui être préféré dans tous ses usages.

b. Prisme de Muller retourné. — Le retournement ne change rien à la marche du faisceau ordinaire; mais celle de l'extraordinaire est à recalculer entièrement. On peut néanmoins tirer parti du calcul déjà fait, en échangeant, par exemple, les η et les ζ pour les surfaces d'onde et les plans tangents; dans les expressions des paramètres directeurs m_1, n_1, m_2, n_2, il vient a où l'on avait b et réciproquement, alors que pour les directions rien n'est changé en x ou ξ.

On trouve finalement :

$$\text{Rayon extraordinaire : } e = -E\left(1 + \frac{2Y}{l}\right), \qquad \text{rayon ordinaire : } e = 0$$

et

$$h_e - h_o = -E\left(1 - \frac{Y}{l}\right),$$

c'est-à-dire les mêmes aberrations que dans la position directe, avec changement de signe du coefficient de Y comme dans le cas du troisième biréfringent.

c. Prisme de Rochon retourné. — Commençons par le faisceau ordinaire, d'abord extraordinaire dans le premier milieu. La position de l'axe est nouvelle et le calcul correspondant n'a pas encore été fait; mais il suffit de reprendre le cas du même faisceau dans le Wollaston en position directe et d'échanger les x et les y (*fig.* 49) dans le calcul des directions. On retrouve donc la même valeur de α.

Fig. 49. — Le cas du R ou du W retourné se ramène, pour le premier milieu, à celui du W en position directe.

Le second milieu est isotrope pour le faisceau devenu ordinaire; on retrouve donc également β sans changement. Mais α et β ne carac-

térisent la marche d'un rayon que par rapport à l'axe des z; l'échange des x et des y, s'il ne les affecte pas, entraîne celui des paramètres directeurs correspondants l_1 et m_1 d'une part, l_2 et m_2 d'autre part, d'où des valeurs nouvelles pour ρ_1 et ρ_2. On profite toutefois d'une partie encore du calcul fait pour le Wollaston, et l'on trouve

$$e = \mathrm{E}\left(1 - \frac{\mathrm{Y}}{2l}\right),$$

$$h_o = \frac{l}{n} + \mathrm{E}\frac{\mathrm{Y}}{2l} - l\frac{i^2}{2n}.$$

Le faisceau extraordinaire est d'abord ordinaire; sa première réfraction est donc toute calculée. La seconde constitue un cas nouveau et l'expression de β notamment se complique, mais, là encore, la suite du calcul amène des simplifications et l'on trouve

$$e = 0,$$

$$h_e = \frac{l}{n} - \mathrm{E}\left(l + \frac{\mathrm{Y}}{l}\right) - l\frac{i^2}{2n},$$

d'où également

$$h_e - h_o = -\mathrm{E}\left(l + \frac{3\mathrm{Y}}{2l}\right).$$

Il n'est pas étonnant de trouver $e = 0$ cette fois pour le faisceau extraordinaire; c'est pour lui, en effet, que les deux milieux du prisme présentent maintenant une symétrie de révolution. Le faisceau ordinaire, au contraire, a les aberrations du faisceau extraordinaire dans la position directe, au signe de Y près.

La variation de $h_e - h_o$ est symétrique, par rapport à l'origine, de celle que nous avions trouvée dans la position directe; elle s'en déduit par le changement de signe de Y et de l'aberration. Comme ces signes importent peu, il est permis de dire que le retournement conserve, au prisme de Rochon, ses propriétés vis-à-vis des images.

d. Prisme de Wollaston retourné. — C'est ici le faisceau ordinaire qui aura une marche identique dans le R et dans le W, étant ordinaire dans le milieu l'axe est orienté différemment dans ces deux biréfringents.

Pour le faisceau extraordinaire, sa première réfraction est celle du cas précédent. Le calcul de la seconde réfraction se déduit de celui qui a été fait pour le même faisceau, dans le R ou le W en position directe (*fig.* 50) par une permutation des axes a et b.

On trouve ainsi

$$e = -\mathrm{E},$$

$$h_e = \frac{l}{n} - \mathrm{E}\frac{\mathrm{Y}}{l} - l\frac{i^2}{2n},$$

d'où, connaissant déjà h_0 et e pour le faisceau ordinaire,

$$h_e - h_o = \quad \mathrm{E}\frac{\mathrm{Y}}{l},$$

comme pour le W dans la position directe.

Fig. 50. — Le cas du W retourné se ramène,
pour le premier milieu, à celui du W en position directe,
pour le second milieu, à celui du R ou du W en position directe.

Les quantités e sont simplement échangées par le retournement; celle du faisceau ordinaire en position directe affecte maintenant l'extraordinairement et réciproquement. Il n'est même pas nécessaire de les représenter graphiquement pour conclure que le retournement ne modifie pas les aberrations du Wollaston.

3. **Applications numériques.** — Les formules rigoureuses obtenues, qui contiennent les quantités auxiliaires α et β en plus des données, peuvent être utilisées en vue d'applications numériques en y introduisant les valeurs des indices du cristal (sous forme de leurs inverses a et b) et des paramètres de forme p, φ et, éventuellement, φ' du prisme; nous pourrons enfin laisser à i une valeur quelconque et aussi grande que nous voudrons.

Nous nous bornerons à une seule application qui peut être intéressante en Physique, et dont les résultats se prêtent à une vérification commode de la théorie. La constante la plus immédiatement utile d'un biréfringent est son dédoublement angulaire. Or, il est facile de constater qu'il varie avec l'angle d'incidence; nous nous proposons de dresser une table du dédoublement angulaire de divers biréfringents en fonction de i. Ce phénomène n'a sans doute jamais été calculé complètement; nous allons voir que les formules qui résolvent le problème, même pour un angle de coupe quelconque, sont fort simples.

A. Formules générales. — Cherchons d'abord quelles sont, parmi les formules obtenues en cours de calcul, celles qui fournissent la solution du problème posé.

Nous ne pouvons qu'étudier séparément la déviation des deux rayons, le dédoublement angulaire s'obtenant ensuite par différence dans un sens conventionnel. Considérons un rayon incident dans le plan de la section principale (*fig.* 51); le rayon émergent OR a pour paramètres directeurs l_3, m_3, n_3; comme la somme de leurs carrés est égale à $\frac{1}{\sin^2 i}$, on obtient

les cosinus directeurs en multipliant les paramètres correspondants par sin i. En particulier, on aura

$$\sin i' = m_3 \sin i = \frac{1}{2}(\alpha + 1 - \beta\sqrt{2}) \sin i.$$

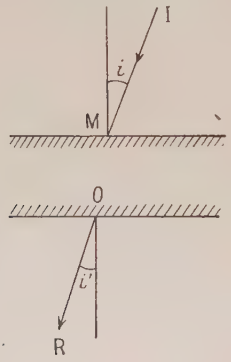

Fig. 51.

B. Artifices de calcul ($p = 45^0$). — Nous ferons simultanément le calcul de i' pour les deux rayons symétriques par rapport à la normale; une partie des opérations étant communes. Nous avons le choix entre deux solutions: ou conserver $\psi = \frac{\pi}{2}$ et changer le signe de i, ou, au contraire, conserver i et changer celui de $\sin\psi(= 1)$; la seconde est la plus avantageuse. Nous écrirons donc

$$\sin i' = \frac{1}{2}(\alpha \pm 1 - \beta\sqrt{2}) \sin i,$$

où il est sous-entendu que β prend deux valeurs différentes suivant le signe adopté devant 1; cela résultera du calcul détaillé dans chacun des cas envisagés.

a. Prisme de Muller. — Pour le rayon ordinaire, le prisme se comporte comme une lame à faces parallèles et l'on a

$$i' = i_0.$$

Pour le rayon extraordinaire, nous avons en faisant $\sin\psi = \pm 1$ et en introduisant les notations A et B définies p. 000 :

$$\alpha = \frac{B}{A} + \frac{\sqrt{2A - 4a^2b^2 \sin^2 i}}{A \sin i},$$

$$\beta\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2 - b^2 \sin^2 i}(\alpha \pm 1)^2}{a \sin i}.$$

Posons

$$\sin j = \frac{2ab}{\sqrt{2\,\mathrm{A}}} \sin i \qquad \text{et} \qquad \sin \mathrm{X} = \frac{b}{\sqrt{2}} (\alpha \pm 1) \sin i.$$

Nous pourrons écrire

$$\alpha = \mp \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \frac{\sqrt{2\,\mathrm{A}}}{\mathrm{A} \sin 1} \cos j = \mp \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \frac{2ab}{\mathrm{A}} \cot j.$$

Dans le cas du quartz, le coefficient de $\cot j$ ne diffère de l'unité que de 3.10^{-8}; on peut donc écrire sans commettre une erreur appréciable :

$$\alpha = \mp \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \cot j.$$

On ne passera pas par la valeur de j; lorsqu'on aura obtenu $\sin j$, on en déduira la cotangente par une interpolation proportionnelle dans le même intervalle de l'argument; aux petits angles où les différences tabulaires sont grandes, elles sont d'autant plus voisines pour le sinus et la cotangente et l'interpolation est finalement aussi facile que pour les petites différences.

D'autre part,

$$\beta \sqrt{2} \sin i = \frac{\sqrt{2}}{a} \cos \mathrm{X},$$

et comme

$$(\alpha \pm 1) \sin i = \frac{\sqrt{2}}{b} \sin \mathrm{X},$$

on aura

$$\sin i'_c = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{b} \sin \mathrm{X} - \frac{\sqrt{2}}{a} \cos \mathrm{X} \right) = \frac{1}{a} \sin \left(\mathrm{X} - \frac{\pi}{4} \right) + \left(\frac{1}{b\sqrt{2}} - \frac{1}{a\sqrt{2}} \right) \sin \mathrm{X}.$$

Le second terme, que l'on peut considérer comme un terme correctif car il est petit, est toujours positif pour un cristal positif comme le quartz. Dans le terme principal, il est facile de se rendre compte que les deux valeurs de X encadrent $\frac{\pi}{4}$ et s'en écartent quand i augmente. La valeur de i' change donc de signe et il faudra, dans le calcul pratique en valeurs absolues, retrancher le terme correctif quand i sera négatif; on pourra ainsi ne donner son signe à i' qu'en fin de calcul.

Pour exprimer le dédoublement angulaire, on peut revenir à la notion d'incidences négatives; on aura alors

$$\delta = i'_c - i'_a = i'_c - i,$$

où i sera pris cette fois avec son signe + pour $\sin \psi = +1$ dans le calcul et inversement.

b. Prisme de Rochon. — Nous avons ici pour le rayon ordinaire

$$\alpha \sin i = \frac{1}{a}\sqrt{1 - b^2 \sin^2 i},$$

$$\beta\sqrt{2}\sin i = \frac{1}{a}\sqrt{2 - a^2 \sin^2 i(\alpha \pm 1)^2}.$$

Posant

$$\sin j = b \sin i \qquad \text{et} \qquad \sin X = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin i(\alpha \pm 1),$$

nous aurons

$$\alpha \sin i = \frac{1}{a}\cos j \qquad \text{ou} \qquad \alpha = \frac{b}{a}\cot j$$

et

$$\beta\sqrt{2}\sin i = \frac{\sqrt{2}}{a}\cos X.$$

Joignons à cette égalité la définition de sin X; nous voyons que la formule générale de sin i' devient

$$\sin i' = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{a}(\sin X - \cos X) = \frac{1}{a}\sin\left(X - \frac{\pi}{4}\right).$$

On voit que le calcul est fort simple : on passe par log sin j, puis log cot j (lu directement en regard dans la table), α, X et i'. Les cas qui nous restent à traiter vont se résoudre par des calculs tout à fait semblables, même lorsque nous passerons à un prisme d'angle quelconque.

Pour le rayon extraordinaire, on a

$$\alpha \sin i = \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2 \sin^2 i},$$

$$\beta\sqrt{2}\sin i = \frac{1}{b}\sqrt{2 - a^2 \sin^2 i(\alpha \pm 1)^2}.$$

On pose

$$\sin j = a \sin i \qquad \text{et} \qquad \sin X = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin i(\alpha \pm 1),$$

ce qui donne

$$\alpha = \cot j, \qquad \beta\sqrt{2}\sin i = \frac{\sqrt{2}}{b}\cos X, \qquad \sin i' = \frac{1}{b}\sin\left(X - \frac{\pi}{4}\right).$$

c. Prisme de Wollaston. — On a, pour le rayon ordinaire,

$$\alpha \sin i = \frac{1}{b}\sqrt{1 - a^2 \sin^2 1},$$

$$\beta\sqrt{2}\sin i = \frac{1}{a}\sqrt{2 - a^2 \sin^2 i(\alpha \pm 1)^2}.$$

Posons ici

$$\sin j = a \sin i \qquad \text{et} \qquad \sin X = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin i(\alpha \pm 1),$$

c'est-à-dire les mêmes définitions que dans le cas précédent, tout au moins littéralement; mais la valeur de $\sin j$ est identique. Celle de $\sin X$ diffère, car on trouve ici

$$\alpha = \frac{a}{b}\cot j,$$

puis

$$\beta\sqrt{2}\sin i = \frac{\sqrt{2}}{a}\cos X,$$

$$\sin i' = \frac{1}{a}\sin\left(X - \frac{\pi}{4}\right),$$

quant au rayon extraordinaire, on sait qu'il se propage comme dans le prisme de Rochon; le calcul correspondant est donc déjà fait.

c. Extension a p quelconque (R et W seulement). — Laissant de côté dans cette généralisation le prisme de Muller, dont la définition d'ailleurs ne serait plus unique, montrons que les mêmes artifices peuvent encore servir et mènent à un calcul presque aussi simple que pour la valeur particulière $p = 45^\circ$.

Nous avons dit plus haut comment on obtenait les paramètres directeurs quand p était quelconque; on trouve, en particulier,

$$m_3 = \alpha \sin p \cos p + \sin\psi \cos^2 p - \beta \sin p,$$

ce qui donne

$$\sin i' = (\alpha \sin p \cos p \pm \cos^2 p - \beta \sin p)\sin i,$$

formules tout à fait générales où l'on introduira les valeurs de α et de β propres à chacun des cas. La première de ces quantités caractérise la première réfraction, évidemment indépendante de p; sa valeur sera donc la même que pour $p = 45^\circ$, en fonction du même angle j. Seules seront nouvelles les valeurs de β et les définitions de X.

a. Prisme de Rochon. — On a, pour le rayon ordinaire,

$$\beta \sin i = \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2 \sin^2 i(\alpha \sin p \pm \cos p)^2}.$$

Posons

$$\sin X = a \sin i(\alpha \sin p \pm \cos p) = a \sin i \cos p(\alpha \operatorname{tg} p \pm 1),$$

nous aurons

$$\sin i' = \cos p(\alpha \sin p \pm \cos p) - \beta \sin p \sin i$$

$$= \cos p \frac{\sin X}{a} - \frac{1}{a}\cos X \sin p = \frac{1}{a}\sin(X - p).$$

On voit que le calcul est absolument semblable, avec deux modifications simples, à celui que nous avons effectué pour $p = 45^\circ$; il suffit

de remplacer α par $\alpha \operatorname{tg} p$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ par la valeur générale $\cos p$ dans la définition de $\sin X$, et de même $X - \frac{\pi}{4}$ par $X - p$ dans $\sin i'$.

Pour le rayon extraordinaire, on aura

$$\beta \sin i = \frac{1}{a}\sqrt{1 - b^2 \sin^2 i(\alpha \sin p \pm \cos p)^2},$$

et l'on posera

$$\sin X = b \sin i(\alpha \sin p \pm \cos p) = b \sin i \cos p(\alpha \operatorname{tg} p \pm 1),$$

ce qui donne dans l'expression générale écrite plus haut

$$\sin i' = \cos p \frac{\sin X}{b} - \frac{1}{b}\cos X \sin p = \frac{1}{b}\sin(X - p).$$

b. Prisme de Wollaston. — On a, pour le rayon ordinaire, le seul à considérer

$$\beta \sin i = \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2 \sin^2 i(\alpha \sin p \pm \cos p)^2}.$$

Comme pour $p = 45^\circ$, la définition de X s'écrit exactement de même que dans le cas précédent et l'on retrouve également

$$\sin i' = \frac{1}{a}\sin(X - p),$$

la différence entre les deux cas, non apparente, étant dans la valeur de α.

D. Calculs effectués. — Le procédé de calcul qui vient d'être exposé a été utilisé pour les applications suivantes :

1° Dans le cas du quartz :

A. Table du dédoublement angulaire δ des prismes M, R et W de 45° pour les incidences de 2°,5 en 2°,5 entre — 90° et + 90°, à 1′ près.

B. Même table pour R et W seulement de 30, 40, 50 et 60° et les incidences de 10 en 10°.

Il existe des valeurs-limites de l'argument i, qui correspondent à la réflexion totale de l'un des rayons et qui sont indiquées à 1° près. Les deux tables ont été calculées par logarithmes à 5 décimales.

C. Table du dédoublement angulaire à 0′,1 près pour les prismes R et W de 25, 30, 35°, ..., 65° et les incidences de 5° en 5° entre — 30° et + 30°.

Cette table, plus précise que les deux premières, devrait aussi être plus utile; c'est pourquoi l'on a resserré l'intervalle de p et l'on s'est limité aux valeurs de i sur lesquelles il est possible d'opérer des véri-

fications pratiques. Les deux premières tables, plus étendues mais moins précises, étaient destinées surtout à donner l'allure de tout le phénomène. La présente table a été calculée entièrement à l'aide de valeurs naturelles à 6 décimales et à la machine.

D. Calcul analogue, plus précis encore, la 7e décimale étant conservée, au voisinage de l'incidence normale pour les deux Wollaston ($p = 55^\circ\,15'$ et $61^\circ\,20',5$) qui ont été étudiés; ici l'expérience a précédé la théorie et son application numérique.

Les résultats sont donnés, en même temps que ceux de l'expérience, dans la dernière partie du présent travail.

2° Dans le cas du spath, calcul précis, mais pour l'incidence normale seulement, du dédoublement angulaire δ des prismes R et W de 1, 2, 3, ..., 8° qui ont à peu près les propriétés des prismes en quartz de 25 à 65°; les résultats sont donnés dans la Table E.

Ce calcul, bien que limité à $i = 0$, a cependant sa raison d'être; en effet, les formules simples obtenues pour δ par le calcul approché (p. 60) ne sont plus *a priori* suffisantes dans le cas d'une forte biréfringence.

Précisons encore les valeurs numériques qui ont été adoptées pour les constantes optiques du cristal, car il n'y a pas homogénéité absolue à ce point de vue entre les différentes tables.

Les Tables A et B ont été calculées entièrement en captivité à l'aide des valeurs à 4 chiffres dont je m'étais servi couramment jusque-là,

$$\frac{1}{a} = n_o = 1,5442, \qquad \frac{1}{b} = n_e = 1,5533,$$

et qui correspondent à la longueur d'onde de la raie D du sodium.

Les tables plus précises qui suivent, au contraire, ont été établies après mon retour et en remplaçant les valeurs précédentes par d'autres également plus précises, obtenues en interpolant les constantes pour la longueur d'onde du minimum focal d'un objectif visuel, soit

$$\lambda = 0^\mu,575,$$

ce qui donne

$$n_o = 1,54494, \qquad n_e = 1,55408.$$

Il peut apparaître, de ce fait, les différences de 0,5 à 1 % aux fortes incidences. Mais, dans la pratique, il faut s'attendre, dans ce cas, à des écarts de même ordre et plutôt supérieurs, dus à l'incertitude sur la position des faces (erreur prismatique et erreur sur p)

Le calcul pour le prisme de Muller, au contraire, a été fait pour la raie D du sodium; ceci parce que la vérification expérimentale a été effectuée avec, comme source, une lampe à vapeur de sodium. Le renseignement n'est pas indifférent dans ce cas; en effet, les dédoublements

sont très petits, puisque $\delta = 0$ sous incidence normale, et l'on a pu les mesurer avec un micromètre à fils au lieu d'un goniomètre. On a donc là une vérification particulièrement sensible de la théorie.

Conclusions. — Les tables montrent que le dédoublement angulaire passe par un minimum en valeur absolue pour une incidence toujours positive quand le rayon incident, s'écartant de la normale à la face d'entrée, se rapproche de celle au plan de coupe; car il y a une seconde réfraction au passage par ce dernier qui contribue autant que la première à séparer les rayons. L'existence de cette seconde direction particulière rompt la symétrie des phénomènes par rapport à l'incidence normale; c'est aussi la raison pour laquelle l'angle d'incidence qui correspond au minimum de δ s'écarte de zéro quand p augmente. Cela explique enfin les incidences-limites; en effet, il peut y avoir réflexion totale :

1° sur le plan de coupe, pour une incidence toujours négative et qui diminue en valeur absolue quand p augmente, puisque l'incidence du faisceau sur le plan de coupe augmente en même temps et des mêmes quantités que p;

2° sur la face de sortie, et ceci bien que le rayon ait pu pénétrer dans le premier milieu, car il a changé de direction en traversant le plan de coupe et peut se trouver à l'émergence dans les conditions de réflexion totale.

Quant aux valeurs de δ en fonction de l'angle de coupe p, pour l'incidence normale, elles confirment absolument les résultats approchés donnés plus haut par la simple formule

$$\delta_R = \varepsilon \operatorname{tg} p, \qquad \delta_W = 2\delta_R.$$

Même pour le spath dont la biréfringence est près de 20 fois plus forte que celle du quartz, l'écart entre les dédoublements exacts et approchés est, au plus, de l'ordre de $0',1$, soit la limite de la précision des valeurs calculées. La formule approchée n'avait été utilisée jusqu'ici que pour le quartz; aussi a-t-on indiqué spécialement les valeurs qu'elle donne dans le cas du spath. On a adopté pour ce calcul

$$n_e = 1,48697, \qquad n_o = 1,65933 \qquad (\lambda = 0^{\mu},575),$$

d'où l'on tire pour le calcul approché

$$\varepsilon = n_e - n_o = 0,17246 = 592',88.$$

On remarquera que, dans le cas du spath, le dédoublement angulaire est très sensiblement proportionnel à l'angle de coupe lui-même; ceci parce que la formule approchée est pratiquement exacte et que, pour des angles de 1 à 8°, le facteur $\operatorname{tg} p$ diffère peu de p.

Table A.

Dédoublement angulaire en fonction de l'incidence.

1. *Prismes de* 45° (Dédoublements).

Type.	M.		R.		W.	
Signe de *i*.	(+).	(−).	(+).	(−).	(+).	(−).
i.	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′
0.....	−0 0	+ 0 0	+0 31	+ 0 31	+1 02	+ 1 02
2,5.....	2	2	30	32	1 01	04
5.....	3	4	30	33	0 59	06
7,5.....	5	6	30	35	58	09
10.....	6	8	29	36	57	12
12,5.....	8	10	29	38	56	15
15.....	9	13	29	40	55	18
17,5.....	10	15	29	43	55	22
20,0.....	12	18	29	46	54	26
22,5.....	13	22	29	49	54	31
25.....	15	26	30	53	54	36
27,5.....	16	30	30	0 58	54	42
30.....	17	34	31	1 03	54	49
32,5.....	19	40	32	09	54	58
35.....	20	46	33	16	55	2 07
37,5.....	22	0 53	34	24	55	18
40.....	23	1 00	36	35	56	30
42,5.....	25	09	38	46	57	2 45
45.....	26	19	40	1 59	0 59	3 02
47,5.....	28	32	42	2 15	1 01	3 22
50.....	30	1 46	44	2 36	03	3 46
52,5.....	33	2 01	47	2 59	05	4 16
55.....	35	2 20	51	3 27	08	4 48
57,5.....	37	2 44	55	4 00	12	5 32
60.....	41	3 11	0 59	4 43	16	6 23
62,5.....	45	3 43	1 05	5 34	22	7 31
65.....	49	4 23	12	6 38	28	8 49
67,5.....	0 54	5 09	20	7 58	36	10 39
70.....	1 01	5 59	30	9 41	1 47	13 11
72,5.....	09	6 58	43	11 58	2 01	17 53
75.....	20	8 17	2 02	15 44	2 21	-
77,5.....	34	9 38	2 29	-	2 50	-
80.....	1 53	11 17	3 13	-	3 36	-
82,5.....	2 24	13 01	4 51	-	5 18	-
85.....	3 10	15 02	-	-	-	-
87,5.....	4 24	17 14	-	-	-	-
90.....	6 26	19 38	-	-	-	-

Table B.

Dédoublement angulaire en fonction de l'incidence.

2. *Prismes de* 30, 40, 50, 60°.

	p.	30°.		40°.		50°.		60°.	
	Signe de i. / i.	(+).	(−).	(+).	(−).	(+).	(−).	(+).	(−).
Prisme R	0	0 18	0 18	0 26	0 26	0 37	0 37	0 54	0 54
	10	17	20	25	30	34	0 44	46	1 09
	20	18	24	25	37	34	0 57	44	1 38
	30	20	30	27	0 49	35	1 22	45	2 46
	40	24	41	32	1 10	40	2 12	0 51	5 54
	50	30	0 59	39	1 48	0 49	3 57	1 01	–
	60	0 41	1 32	0 53	3 12	1 05	8 34	1 19	–
	70	1 04	2 36	1 21	5 53	1 39	–	1 59	–
	80	2 14	5 27	2 52	13 37	3 34	–	4 21	–
	90	–	–	–	–	–	–	–	–
Prisme W	0	0 36	0 36	0 52	0 52	1 14	1 14	1 47	1 47
	10	34	39	49	0 59	06	1 27	32	2 17
	20	34	44	47	1 09	02	1 48	23	3 10
	30	35	0 52	47	1 25	01	2 25	19	5 07
	40	37	1 04	50	1 51	03	3 32	19	–
	50	43	1 24	0 56	2 36	10	5 58	27	–
	60	0 53	1 59	1 08	4 10	24	13 38	1 42	–
	70	1 17	3 09	1 36	7 18	58	–	2 22	–
	80	2 31	6 35	3 13	–	3 59	–	4 50	–
	90	–	–	–	–	–	–	–	–
Limites de i	R_o	−84		−81		−67		−45	
	R_e W_e	+85		+84		+83		+83	
	W_o	−84		−79		−62		−39	
Minimum de $\lvert\delta\rvert$	R	17		25		34		44	
	W	34		47		1 01		1 18	

(*) Les limites de i sont données pour chaque rayon; la table comprend une case vide dès que l'un d'eux n'est plus transmis.

TABLE C.

Dédoublement angulaire en fonction de l'incidence (*).

3. *Prismes de* 25 *à* 65°, *i de* — 30 *à* + 30°.

	p. \ i.	—30.	—25.	—20.	—15.	—10.	—5.	0.	+5.	+10.	+15.	+20.	+25.	+30.
		° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′
Rochon	25...	0 23,8	0 20,7	0 18,6	0 17,1	0 15,9	0 15,3	0 14,6	0 14,6	0 14,4	0 14,6	0 15,1	0 15,9	0 17,0
	30...	29,9	26,5	23,7	21,5	20,1	19,1	18,2	17,4	17,6	17,8	18,3	19,2	20,4
	35...	39,0	33,7	29,6	26,8	24,6	23,2	22,0	21,5	21,1	21,2	21,6	22,6	23,6
	40...	0 49,5	42,6	37,1	33,3	30,1	28,1	26,3	25,6	24,9	24,4	24,8	25,8	27,2
	45...	1 03,1	0 53,3	46,4	40,5	36,4	33,8	31,3	30,2	29,1	28,9	29,4	30,1	31,4
	50...	1 23,0	1 08,4	0 57,7	0 49,9	44,3	40,7	37,3	35,7	34,0	33,4	33,5	34,5	35,8
	55...	1 53,5	1 30,4	1 14,0	1 02,7	0 54,6	0 49,4	0 44,6	42,1	39,8	38,8	38,5	39,3	40,6
	60...	2 47,1	2 06,0	2 38,9	1 19,4	1 08,8	1 00,9	0 53,9	0 50,3	46,8	45,2	44,4	44,8	46,0
	65...	4 42,3	3 12,7	2 20,6	1 49,6	1 29,4	1 16,6	1 06,5	1 00,6	56,6	52,8	51,4	51,5	52,3
Wollaston	25...	0 41,0	0 37,3	0 34,8	0 32,9	0 31,3	0 30,3	0 29,2	0 28,7	0 28,2	0 28,1	0 28,2	0 28,5	0 29,2
	30...	0 51,9	0 47,8	44,4	0 41,6	39,4	37,7	36,2	34,8	34,6	34,2	34,1	34,4	35,0
	35...	1 07,1	1 00,7	0 55,5	0 51,7	48,4	45,9	44,0	42,5	41,4	40,7	40,5	40,5	40,6
	40...	1 25,5	1 16,2	1 09,0	1 03,9	0 59,1	0 55,5	0 52,7	50,5	48,9	47,4	46,6	46,5	47,0
	45...	1 49,9	1 36,1	1 26,3	1 17,7	1 10,9	1 06,7	1 02,8	0 59,6	0 56,7	0 55,2	0 54,5	0 53,8	0 54,1
	50...	2 25,5	2 04,5	1 49,0	1 37,0	1 27,7	1 20,5	14,9	1 10,4	1 06,9	1 04,4	1 02,6	1 01,8	1 01,1
	55...	3 21,7	2 46,3	2 20,9	2 02,5	1 48,5	1 37,9	29,6	1 23,2	18,4	14,8	12,1	10,5	09,7
	60...	5 08,0	3 56,2	3 10,8	2 37,8	2 17,1	2 01,0	1 48,7	1 39,5	32,3	27,1	23,1	20,5	19,0
	65...	9 28,7	6 32,1	4 39,8	3 39,5	3 00,5	2 33,6	2 14,7	2 00,5	50,0	42,3	36,4	32,4	29,9

(*) Le signe est le signe + pour tous les dédoublements.

TABLE D.

Dédoublement angulaire pour les prismes en spath (*)
(incidence normale).

Prismes. \ p.	1°.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
	′	′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′
R....	10,4	20,7	0 31,1	0 41,5	0 51,9	1 02,4	1 12,9	1 23,4
W...	20,7	41,4	1 02,2	1 22,9	1 43,7	2 04,7	2 25,7	2 46,7
Valeurs données par la formule approchée.								
R....	10,35	20,69	31,07	41,46	51,87	1 02,31	1 12,80	1 23,32
W...	20,70	41,38	1 02,14	1 22,92	1 43,74	2 04,62	2 25,60	2 46,64

(*) Tous les dédoublements ont le signe —.

Les valeurs approchées sont données avec une décimale de plus que celles que l'on a obtenue par le calcul exact. Ce paradoxe apparent vient de ce que les termes *approché* et *exact* qualifient la méthode et non les résultats; si l'on peut fort bien donner deux décimales de δ réduit à son premier terme, le calcul exact, au contraire, donne δ par la différence de deux angles voisins et assez grands $\left(X - \frac{\pi}{4}\right)$ ou, plus généralement $(X - p)$ et il faut le faire avec 6 décimales au moins pour obtenir δ à o′,1 près. L'intérêt de la Table E est justement de montrer que, pour l'incidence normale, la formule simple de δ donne une valeur absolument conforme au résultat d'un calcul exact, même avec des angles de coupe assez grands (ne pas oublier qu'on a affaire au cas du spath).

TROISIÈME PARTIE.

VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DES PRISMES BIRÉFRINGENTS.

1. **Prismes étudiés.** — On a soumis à divers essais les biréfringents suivants :

a. Le prisme A, le premier qui ait été monté dans le nouveau micromètre, où il a servi pendant la première année. Considéré jusque-là comme

un Rochon, il s'est révélé à l'essai être du second genre; de section carrée ($p = 45°$), il dédoublait 11′ et donnait un grandissement de 87,9 alors que les constantes correspondantes d'un Rochon de même forme sont 31′ et 169.

La position des axes a été déterminée par la suite, mais l'expérience n'est pas assez précise pour donner les valeurs dites théoriques des constantes telles qu'on les calcule pour les biréfringents classiques à définition simple. Ce sont, au contraire, les valeurs expérimentales de ces constantes qui ont permis de lever une indétermination de 90° sur la position des axes.

On a trouvé

$$\varphi = 162°,8; \qquad \varphi' = 41°,8.$$

L'un des axes est donc peu éloigné d'une parallèle au plan de coupe, l'autre faisant, avec la face d'entrée, un angle de 17° environ. La précision du résultat est suffisante pour que l'on puisse affirmer que φ' n'est pas égal à 45° exactement, comme on avait peut-être cherché à l'obtenir en taillant ce prisme.

b. Deux prismes de Wollaston, l'un de 55°, l'autre, beaucoup plus gros, de 61°; le second a été monté quelque temps dans un micromètre du grand équatorial. Nous désignerons ses biréfringents par les notations W_{55} et W_{61}.

c. Les deux prismes de Muller commandés et taillés en 1938, dont le premier a remplacé le prisme A dans le micromètre en février 1938, et que nous appellerons M_1 et M_2.

d. Enfin, et pour mémoire seulement, car ils n'ont été essayés qu'au point de vue de la qualité des images transmises, deux beaux Rochon-Wollaston de 45° (section carrée de 20^{mm} de côté et 4 faces polies, permettant le double usage), obligeamment prêtés par M. Cabannes.

On a mesuré avec soin les dimensions exactes de ces divers biréfringents pour déterminer les valeurs de leurs angles de coupe *p*. Quand les mesures trahissaient des différences sensibles entre les arêtes parallèles, on a défini *p*, suivant la convention de la page 73, comme étant l'angle réfringent du premier prisme de l'assemblage traversé par la lumière. Le sens de propagation est lié aux notations φ et φ' dans le cas des prismes A, M_1 et M_2 et pour les Wollaston le premier prisme est toujours celui dont l'axe cristallographique est dans le plan de la section principale.

2. **Effet de couleur**. — L'effet de couleur, commun à tous les prismes, consiste en une variation des constantes δ et g, avec la longueur d'onde de la lumière utilisée, variation proportionnelle à celle des coefficients ε

et $\frac{\varepsilon}{n}$ qui figurent en facteur respectivement dans les expressions de δ et de γ (inverse de g). Cet effet a été vérifié sur les valeurs de g en mesurant les mêmes étoiles doubles artificielles en lumière bleue et en lumière rouge; la différence $\Delta\lambda$ des longueurs d'onde moyennes transmises par les deux écrans était de l'ordre de $0^{\mu},16$.

On a mesuré, dans chaque série, trois étoiles différentes, chacune en bleu et en rouge; chaque mesure était faite suivant la méthode habituelle (d ou $4d$) en 20 pointés. Il a été obtenu ainsi 14 séries (soit 84 mesures et 1680 pointés) entre lesquelles les éléments du montage ont parfois subi des modifications. On a donc traduit le résultat de chaque série par l'écart relatif e entre les distances trouvées en rouge (d_1) et en bleu (d_2) :

$$e = 2\frac{d_2 - d_1}{d_2 + d_1}.$$

Les 14 valeurs de e sont assez dispersées, les écarts observés n'excédant guère le double des écarts accidentels sur chaque mesure, mais ils sont tous de même signe; leur moyenne donne

$$e = 0{,}015 \pm 0{,}005,$$

nombre qui est en bon accord avec la valeur indiquée par la théorie (p. 71) :

$$e = 0{,}11\,\Delta\lambda = 0{,}018 \qquad (\Delta\lambda \text{ en microns}).$$

3. **Angle prismatique**. — Cette étude n'a porté que sur les prismes de second genre (A, M_1 et M_2), qui se comportent à l'égard du rayon ordinaire comme un prisme isotrope d'indice n et de très petit angle ϖ; cet angle s'obtient donc très simplement par la mesure de la déviation $(n-1)\varpi$ du rayon ordinaire à l'aide d'un goniomètre.

Toutefois, nous ne nous intéressons qu'à la composante de cet effet dans le sens des mesures micrométriques, c'est-à-dire dans le plan de la section principale. Considérons (*fig.* 52) les deux normales ON_1 à la face d'entrée et ON_2 à la face de sortie; ON_2 est généralement en dehors du plan de la section principale et fait avec ON_1 un petit angle ϖ qui est l'angle prismatique proprement dit. Mais nous cherchons à déterminer l'angle ϖ' de ON_1 avec la projection On_2 de ON_2 sur le plan de la section principale. Les angles restant petits, la composante de la déviation dans ce plan est égale à la déviation que produirait un angle prismatique égal à ϖ'.

Plaçons le biréfringent sur le plateau d'un goniomètre de façon que sa section principale soit horizontale et l'incidence sensiblement normale. Si l'on dispose d'un repère le long de la fente du collimateur, une échancrure par exemple, on constatera que la déviation se fait dans une direction quelconque (*fig.* 53); sa grandeur Δ donnerait le véritable angle

prismatique ϖ. La mesure de δ, projection de Δ sur l'horizontale, nous donne ϖ', composante correspondante de ϖ. Pour rendre la figure plus

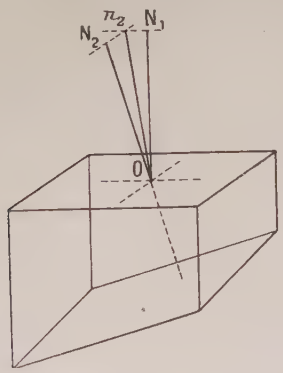

Fig. 52. — Définition de l'erreur prismatique.

parlante, nous avons supposé que l'on voyait dans le champ les deux extrémités de la fente.

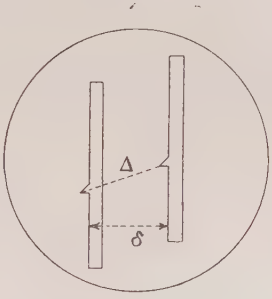

Fig. 53. — Observation de l'effet prismatique.

L'expérience a fourni les valeurs suivantes de ϖ' :

Prismes	A	1',8		
»	M_1	2',7		
»	M_2	4',5	sens 1-3	(*fig.* 54).
		1',0	sens 2-4	

Au sujet de la forme réelle du biréfringent, ajoutons la remarque suivante. La position des faces latérales n'ayant aucune importance, les erreurs de forme se ramènent à deux :

1° l'angle prismatique;
2° une courbure totale résultant de la non-planéité possible des faces.

Nous venons d'étudier l'effet prismatique; l'effet de courbure consiste en une modification du foyer, qui a été constatée réellement sur le prisme M_2 (faces 1-3) dans le sens d'une légère convergence.

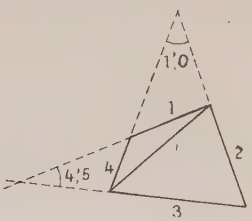

Fig. 54. — Sens des erreurs prismatiques dans le prisme M_2.

4. **Constantes.** — *a.* On a déterminé d'abord le dédoublement angulaire δ des divers biréfringents sous des incidences échelonnées autour de l'incidence normale.

Pour le prisme A et les deux Wollaston, les mesures ont été faites à l'aide du goniomètre en pointant successivement les deux images de la fente du collimateur; la différence des lectures donnait δ à 0',5 près environ.

Pour les nouveaux prismes M, le dédoublement angulaire à mesurer part de la valeur zéro pour l'incidence normale et croît d'abord comme γi, avec

$$\gamma = \frac{1}{g} = 0{,}0119.$$

On a donc recherché une précision supérieure en remplaçant le viseur du goniomètre par un petit objectif de Steinheil ($D = 20^{mm}$; $F = 163^{mm}$) associé au micromètre à fils du petit équatorial, le tout indépendant du goniomètre dont on n'utilisait que le collimateur et le plateau central portant le prisme. Cela permettait, en même temps, de repérer les incidences, non sur la division de ce plateau, mais sur celle même du goniomètre; comme enfin l'incidence normale est nettement marquée, pour ces prismes, par le dédoublement angulaire nul, toute l'échelle des incidences était ici beaucoup mieux déterminée que pour les autres biréfringents.

La valeur angulaire du tour de vis du micromètre à fils a été mesurée directement de la façon suivante :

On remplace le prisme sur le plateau par un miroir qui renvoie le faisceau issu du collimateur et l'on pointe l'image de la fente dans le micromètre à fils pour deux positions voisines du plateau. On lit sur le cercle du goniomètre l'angle α dont a tourné le miroir et la différence des deux lectures au micromètre correspond à un angle 2α.

En fait, on a étudié le prisme M_1 comme les autres sur le goniomètre, pour le monter bientôt dans le micromètre, et seul le prisme M_2 a fait l'objet de mesures par la méthode précise que nous venons de décrire. On a d'ailleurs déterminé les valeurs de δ en fonction de i pour les directions de traversée 1-3 et 2-4 (le sens important peu), afin de compenser, au moins en partie, les erreurs de taille en faisant intervenir les quatre angles réfringents. Les résultats sont extrêmement voisins et l'on a pris leur moyenne en admettant qu'elle correspond à un angle de coupe de 45° exactement; on verra que cette hypothèse était pleinement justifiée.

b. Pour déterminer le *grandissement* d'un biréfringent, on le monte sur un chariot mobile devant l'oculaire d'une petite lunette et l'on mesure par double image un objet dont cette lunette donne une image de dimensions linéaires connues; en fait, on mesure une petite longueur dans le sens du dédoublement. Le montage est représenté dans la figure 55 :

Fig. 55. — Montage pour les mesures au laboratoire.

un objectif de microscope placé en M donne de l'objet O une première image très petite, qu'on observe à l'aide de l'objectif d'expérience L associé à l'un ou l'autre des micromètres (fils ou double image).

On pourrait obtenir par le calcul la petite longueur mesurée dans le plan-image de la lunette, mais il a paru préférable de s'affranchir des données numériques du montage en la déterminant directement à l'aide du micromètre à fils. On a essayé plusieurs mires, notamment des graduations sur verre ou sur fond blanc et des écrans dont la forme la meilleure a paru être la suivante (*fig.* 56) : quatre trous A, B, C, D sont disposés

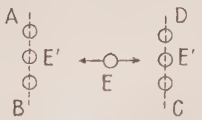

Fig. 56. — Forme d'écran adoptée pour certaines mesures par double image.

aux sommets d'un rectangle dont les grands côtés sont horizontaux; un cinquième trou E est à mi-hauteur entre ces côtés, mais à une petite distance du centre du rectangle. La mesure consiste à amener l'image mobile de E, soit E′, successivement sur chacun des côtés verticaux AB

et CD. Si le trou E se trouvait au centre du rectangle, il y aurait, au moment où l'un de ces alignements serait réalisé, un autre alignement qui le serait presque, à savoir celui de l'image fixe E sur l'une des images mobiles des côtés verticaux. L'expérience a montré que la quasi-simultanéité de ces deux alignements gênait l'observation de celui que l'on recherchait, d'où le choix pour E d'une position un peu excentrée. Trois écrans de ce genre ont été utilisés, avec écartements voisins de 6, 9 et 12^{mm}; 1^{mm} de l'objet correspondait à 23^{μ} de l'image.

Lorsque l'objet est une règle divisée, la mesure consiste à amener un trait déterminé d'une image successivement au milieu de deux intervalles de la division, pris sur l'autre image et aussi écartés que possible. On est limité, en général, par la course disponible dans le micromètre à double image; mais, dans la détermination de cette même longueur à l'aide du micromètre à fils, rien n'empêche d'utiliser sur la même règle un intervalle plusieurs fois supérieur (1).

La mesure directe du grandissement par ces méthodes reste assez délicate en raison notamment de sa variation sensible avec l'incidence sous laquelle fonctionne le biréfringent. Aussi n'a-t-on entrepris cette détermination que pour les prismes qui ont été effectivement montés dans un micromètre, c'est-à-dire les prismes A, M_1 et W_{65}.

Mais une autre vérification de la valeur de g a été obtenue pour tous les biréfringents en mesurant la pente à l'origine des courbes $\delta = f(i)$, pente qui, d'après la théorie, est égale à γ. L'accord entre la valeur calculée et cette seconde valeur expérimentale peut être considéré comme très satisfaisant, étant donnée la nature de la mesure qui la fournit.

e. Variation du grandissement avec l'incidence. — Le grandissement d'un biréfringent, comme son dédoublement angulaire, est loin de constituer pour lui une constante absolue; tous deux varient de façon continue avec l'incidence, et rien dans ces variations ne distingue l'incidence normale.

Pour connaître au moins l'ordre de grandeur de l'écart à craindre de ce fait entre la valeur calculée de g, l'incidence étant supposée normale, et sa valeur réelle, on a mesuré un même objet (en l'espèce une même étoile artificielle) sous diverses incidences à l'aide du micromètre qui était alors muni du prisme M_1. On n'a pas cherché à déterminer le gran-

(1) Précisons que si, par commodité et pour mieux décrire la méthode, nous avons employé les termes *image fixe* et *image mobile*, ce langage n'est plus exact lorsqu'il s'agit d'un Wollaston; les images sont alors mobiles toutes deux et l'on choisira sur celle que l'on voudra le trait destiné à jouer, en somme, le rôle d'un index mobile se déplaçant sur l'autre. Comme les images sont déformées toutes deux par rapport à l'image que l'on mesure par les fils, on calculera la longueur mesurée par double image, suivant qu'elle est prise sur l'image ordinaire ou sur l'extraordinaire, en multipliant par $1 - \frac{\gamma}{2}$ ou par $1 + \frac{\gamma}{2}$ respectivement la valeur donnée par l'étalonnage avec les fils.

dissement lui-même, mais seulement ses variations; il suffisait, pour cela, de connaître les variations relatives avec l'incidence de la quantité trouvée, exprimée simplement par sa valeur n en tours de vis.

L'inclinaison du micromètre entier, et non du prisme seul, a pour effet de multiplier par sec i le déplacement nécessaire pour mesurer une longueur donnée; il en résulte que la valeur de n reste à multiplier par cos i avant d'en déduire g. Les valeurs de $n \cos i$ sont alors proportionnelles à $g + \frac{1}{2}$.

Comme il ne pouvait guère être question d'installer le micromètre avec son support de laboratoire sur un plateau tournant, on a procédé plus simplement de la façon suivante. Sous le support, on avait fixé à la table d'expérience, au voisinage de l'endroit où venait reposer l'un des bords latéraux du support, une feuille de papier portant un faisceau de droites échelonnées de 2°,5; pour les mesures, on plaçait ce bord successivement le long de chacune des droites, celle du milieu correspondant sensiblement à l'incidence normale, mais sans qu'un écart d'un demi-degré par exemple sur cette incidence de départ pût affecter sensiblement le résultat; seul importait l'échelonnement des incidences.

En partant de la valeur de g calculée pour l'incidence normale, on a traduit en grandissements (exacts à une quantité sensiblement constante près) les nombres obtenus en tours de vis. On obtient ainsi le tableau suivant :

i.	n.	g.
—5°	13,99	93,2
—2 5	13,25	88,5
0	12,56	84,0
+2 5	12,04	80,4
+5	11,32	75,3

soit une variation d'environ 1,8 par degré; en faisant

$$p = 45^\circ, \qquad \varphi = 45^\circ, \qquad \varphi' = 135^\circ,$$

dans la formule de la page 75, la théorie donne le coefficient

$$\frac{\Delta g}{\Delta i} = -1,91 \qquad (i \text{ en degrés}),$$

en bon accord avec l'expérience, qui a d'ailleurs précédé d'assez longtemps le calcul.

On voit que cette variation est importante et ressort avec la plus grande netteté d'une expérience sommaire.

d. Résultats. — Le tableau suivant résume les résultats de ces mesures en ce qui concerne les constantes. On y trouve, dans l'ordre des colonnes :

1° le nom du biréfringent considéré;

2° ses dimensions (longueur l et épaisseur e) dans le plan de la section principale;

3° la valeur de l'angle de coupe p déduite de ces données par la formule

$$\operatorname{tg} p = \frac{e}{l}.$$

Pour le prisme M_2, la valeur donnée dans cette colonne résulte de la mesure des quatre côtés et des angles droits de la section principale et représente la moyenne des deux angles p pour les deux directions de traversée perpendiculaires du biréfringent;

4° la valeur de p obtenue par mesure directe en plaçant le biréfringent sur un plateau tournant et en amenant successivement les images des diverses arêtes latérales des deux prismes assemblés sur le fil d'un microscope vertical disposé au-dessus du plateau. Cette mesure donne l'angle à 2 ou 3 minutes près et constitue une vérification de la légitimité du calcul à partir de l et de e.

5° et 6° les valeurs de constantes δ et g pour l'incidence normale, calculées à partir de la première valeur de p;

7° la valeur observée de δ pour l'incidence normale;

8° les deux valeurs expérimentales de g pour l'incidence normale, la première déduite des mesures directes, la seconde des courbes $\delta = f(i)$.

Tableau X.

1.	2.		3.	4.	5.	6.	7.	8.	
Prisme.	l^{mm}.	e^{mm}.	p_e.	p_0.	δ_e.	g_e.	δ_0.	g_0.	
			° ′	° ′	° ′		° ′		
A.....	16,94	16,89	44 55	44 53	11	88,4	11	88,0	88
W_{55}....	9,96	14,36	55 14	55 09	1 30	40,7	1 29	–	40,5
W_{61}....	29,27	55,36	61 20	61 21	1 55	25,8	1 55	25,2	25,4
M_1.....	22,92	22,91	44 59	44 57	0	84,0	0	84,4	84
M_2.....	22,95	23,01	45 00	44 59	0	84,0	0	–	83

On a tracé, d'autre part, les courbes de dédoublement angulaire en fonction de l'incidence en faisant, pour les Wollaston et pour le prisme M, le calcul numérique indiqué à la fin de la seconde partie (p. 104); pour le prisme A, de forme non classique, on n'a que la courbe expérimentale. Les points observés viennent, aux erreurs de mesure près, se placer sur les courbes calculées; pour les deux Wollaston, il a fallu les décaler légèrement en abscisses, l'incidence moyenne des mesures n'ayant pas dû être exactement nulle. Pour le prisme de Muller, ce réglage était au contraire, facile à assurer, par observation du dédoublement nul. Aussi peut-on, dans ce cas, comparer directement les valeurs calculées de δ et les valeurs mesurées, puisqu'elles correspondent aux mêmes

incidences. Donnons encore, avant le tracé des courbes pour les autres prismes, le tableau des valeurs ainsi comparées :

Dédoublement angulaire (Prisme de Muller).

Angle d'indice i (valeur absolue).	i positif		i négatif	
	δ_o.	δ_e.	δ_o	δ_e.
°	′	′	′	′
0	0	0	0	0
2	— 1,42	1,4	+ 1,47	1,4
4	2,74	2,7	3,00	3,0
6	4,00	4,0	4,50	4,5
8	5,23	5,2	6,15	6,1
10	6,42	6,4	8,03	8,0
12	7,56	7,5	9,88	9,9
14	8,72	8,7	11,90	11,9
16	9,83	9,8	14,08	14,0
18	10,94	10,9	16,40	16,3
20	12,01	11,9	18,87	18,9

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES MÉTHODES DE MESURE PAR DOUBLE IMAGE.

1. **Généralités.** — On a procédé à une étude systématique des méthodes par double image appliquées à la mesure des étoiles doubles. Le cas des diamètres n'a pas été examiné; il soulève d'ailleurs des problèmes très différents. En outre, la limitation assez étroite des écartements mesurables avec le nouveau micromètre interdit la mesure de la plupart des diamètres planétaires.

Écartons immédiatement une objection possible. L'usage d'un biréfringent entraîne une déformation relative des deux images; peut-on, de mesures faites sur ces images, tirer des conclusions sur des méthodes qui les supposent essentiellement identiques en grandeur ? La question se pose dans la mesure où la déformation est sensible à l'œil; en fait, les prismes A et M_1 utilisés ne causent qu'une déformation relative de 1/85^e environ dans la position d'alignement où elle est maximum. Le pointé présente donc absolument l'apparence d'une vraie équidistance, bien que celle-ci soit théoriquement irréalisable.

Précisons que, sauf avis contraire, mes mesures de distance ont été faites en disposant les couples suivant la ligne des yeux.

Le montage était celui de la figure 55, avec, pour objet, une plaque de laiton noirci percée de sept couples de trous d'environ 5/10^e de millimètre de diamètre et écartés respectivement de 1, 2, 3, ..., 7^{mm}; voici

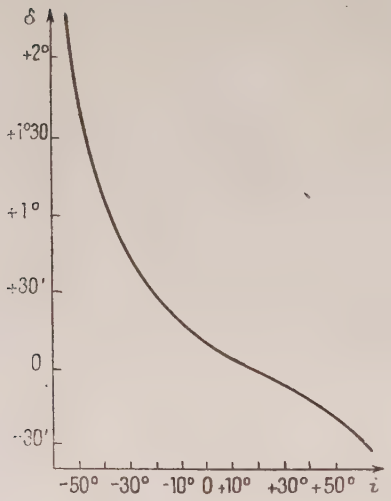

Fig. 57. — Dédoublement angulaire en fonction de l'angle d'incidence, prisme A (courbe expérimentale).

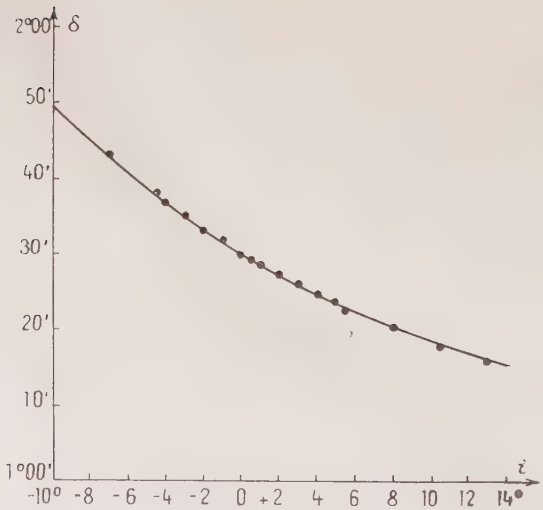

Fig. 58. — Dédoublement angulaire en fonction de l'angle d'incidence, prisme W_{55} (courbe calculée et points observés).

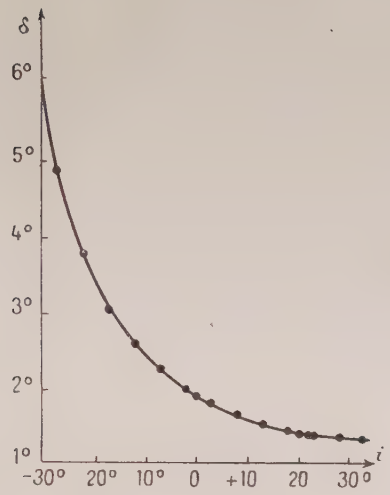

Fig 59. — Dédoublement angulaire en fonction de l'angle d'incidence, prisme W_{61} (courbe calculée et points observés).

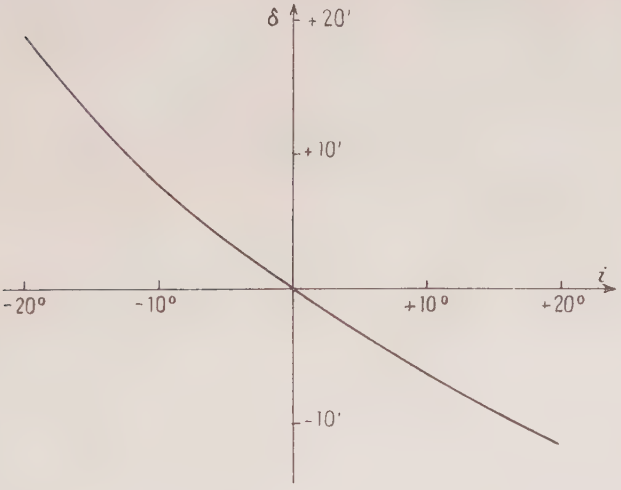

Fig. 60. — Dédoublement angulaire en fonction de l'angle d'incidence, prisme M_2. La courbe expérimentale est pratiquement confondue avec la courbe calculée.

les valeurs exactes de ces écartements ainsi que leurs rapports au plus grand :

Etoile N°.	mm.		Etoile N°.	mm.	
1.....	1,043	0,1497	5.....	5,078	0,7285
2.....	2,081	0,2986	6	5,866	0,8416
3.....	3,070	0,4404	7.....	6,971	1,0000
4.....	4,033	0,5786			

Il y a environ 30^{mm} entre les milieux de deux couples consécutifs.

2. **Mesure des distances.** — A. *Nature des problèmes.* — Il s'agissait principalement de vérifier si la mesure d'une série de couples de distances échelonnées donnait pour résultats des nombres proportionnels aux écartements réels de ces couples; le rapport de proportionnalité lui-même présentait peu d'intérêt et sa valeur a varié légèrement d'une série à l'autre. Dans cette valeur interviennent en effet :

a. le rapport entre les dimensions de l'objet et de son image finale dans le micromètre;

b. le grandissement *g actuel* du biréfringent.

Ces deux quantités ne pouvaient être maintenues constantes au cours d'expériences parfois séparées par d'autres à l'aide du même montage; le seul fait de replacer le micromètre après une soirée d'observations donnait à *g* une valeur nouvelle, par modification de l'incidence.

A supposer que la vérification cherchée se fît, il pouvait donc subsister une erreur d'échelle. Mais d'autres expériences, déjà mentionnées, sont de nature à déceler une erreur de cette forme : ainsi, l'étalonnage de micromètre sur une mire terrestre ou sur des étoiles doubles écartées (p. 31); et l'on sait que les valeurs du tour de vis ainsi déterminées sont en bon accord avec la valeur calculée. On a, néanmoins, contrôlé ce résultat par quelques mesures de laboratoire.

B. *Méthode d'alignement.* — On a mesuré un grand nombre de séries de cinq étoiles au moins par les méthodes d'alignement. Les valeurs relatives des sept distances étant bien connues, on a calculé, pour chacune des distances mesurées lors d'une série, la valeur correspondante de la plus grande des sept, soit D; la série fournissait ainsi autant de valeurs de D que l'on avait mesuré de couples et la moyenne simple [1]

---

[1] Il n'eût pas été correct d'affecter les valeurs de D de poids proportionnels aux distances des couples qui servaient à les calculer; en effet, dans la méthode par double image, les erreurs de mesure elles-mêmes sont en raison directe des distances, de sorte que l'erreur résultante sur D est sensiblement indépendante du couple utilisé.

de ces valeurs représentait la constante du dispositif. Multipliant cette constante par les rapports connus (p. 126), on revenait à des valeurs de chacune des distances que l'on convient d'appeler *valeurs calculées* et qui présentent sur celles données par les mesures l'avantage de reposer sur l'ensemble de la série. C'est par rapport à ces *valeurs calculées* que l'on a formé l'écart *o-c* pour chaque couple dans chaque série. Si les mesures ne donnent pas des distances proportionnelles à leurs vraies valeurs, les *o-c* doivent présenter une allure systématique en fonction de cette distance.

On a utilisé le micromètre du petit équatorial avec le prisme A et, plus tard, le prisme M_1. L'ouverture relative de l'objectif d'expérience étant de 1/8 et celle de l'équatorial de 1/11,4, on a représenté au mieux l'aspect des étoiles doubles artificielles en réduisant les mesures à l'aide de la constante angulaire

$$1\ \text{Tour} = T_1 \frac{8}{11{,}4},$$

où T_1 est la valeur adoptée à l'équatorial. La distance en secondes d'arc ainsi obtenue pour un couple artificiel est celle d'une étoile double qui présente le même aspect (c'est-à-dire le même écartement mesuré en diamètres de la tache de diffraction) dans l'équatorial. Les vraies distances angulaires des étoiles artificielles sont près de dix fois plus grandes que les valeurs conventionnelles ainsi définies, mais leur considération n'offre aucun intérêt.

Les dimensions du montage ont été modifiées plusieurs fois, si bien que la distance apparente d'un couple donné a varié en tout du simple au triple. En groupant les séries, on trouve donc plusieurs couples différents pour des distances de même ordre, ce qui permet d'éliminer en partie l'erreur commise sur les écartements linéaires des couples artificiels. On a formé finalement sept groupes de distances et l'on a représenté l'ensemble des *o-c* par les sept moyennes correspondantes, ce qui a fourni le tableau :

TABLEAU XI.

Groupes.	Distances extrêmes.	Distances moyennes.	*o-c*.	*n*.	couples utilisés.
I.....	0",7-1",0	0",90	+0",004	23	1, 3
II.....	1,3-1,6	1,50	+0,001	33	2, 4, 5
III.....	1,9-2,1	1,98	—0,002	30	2, 3
IV.....	2,2-2,5	2,41	—0,002	27	2, 3, 4, 7
V.....	3,0-3,4	3,13	—0,011	22	3, 4, 5
VI.....	3,6-4,3	4,00	—0,007	34	3, 4, 5, 6, 7
VII.....	4,9-6,2	5,43	+0,023	20	4, 5, 6, 7.

Les *o-c* sont de quelques millièmes de la distance mesurée, donc de l'ordre des erreurs admissibles sur les écartements vrais (en millimètres) des couples artificiels; leur petitesse est suffisante pour que l'on n'accorde pas de signification particulière à l'allure apparemment systématique des signes.

On peut donc considérer l'échelle des distances obtenues par double image comme linéaire des erreurs d'expérience près.

C. *Comparaison des méthodes entre elles.* — On sait que les écartements justiciables à la fois des deux méthodes d'alignement sont assez étroitement limités. On a pu toutefois utiliser plusieurs couples en faisant varier les dimensions du montage. Le résultat de cette comparaison, exprimé en valeur relative de la distance mesurée, est le suivant :

$$\frac{\rho(4d) - \rho(d)}{\rho} = +0{,}001, \qquad n = 7.$$

Il est difficile de conclure autrement qu'en considérant les deux méthodes d'alignement comme équivalentes. Les observations d'une même étoile double réelle par les deux méthodes confirment d'ailleurs ce résultat.

La comparaison des méthodes *d* et *l* (simple distance et losange) a été faite directement par la mesure des étoiles 3, 4, ..., 7 avec des distances de 2″,5 à 4″,5. On a trouvé ainsi

$$\frac{\rho(l) - \rho(d)}{\rho} = -0{,}008, \qquad n = 20.$$

Il n'y avait aucune erreur systématique à craindre dans cette comparaison directe sur les mêmes étoiles; en outre, l'étalonnage du micromètre a montré que les méthodes d'alignement donnaient des distances correctes. On a donc admis que la méthode du losange comportait effectivement une erreur par défaut et l'on a corrigé, en conséquence, la valeur du tour de vis pour réduire les observations faites par cette méthode. Sur le ciel, la correction paraît généralement justifiée; elle est d'ailleurs de l'ordre des écarts accidentels normaux.

On a comparé enfin les méthodes *c* (carré) et *d* en mesurant les étoiles 3, 4, ... par les deux méthodes; le montage étant un peu modifié, les distances allaient de 1″,7 à 3″,9. On a trouvé

$$\frac{\rho(c) - \rho(d)}{\rho} = -0{,}005, \qquad n = 5,$$

sans aucun effet sensible en fonction de la distance.

Il convient, néanmoins, de faire les remarques suivantes au sujet de la méthode du carré.

Tout d'abord on a appliqué les deux méthodes à deux couples assez faciles, ζ Bootis et ξ Ursæ Majoris, avec les résultats suivants :

	c.	4 *d.*
ζ Bootis.....	1,27	1,11
	18	08
	30	07
	1,25	1,09

	c.	4 *d.*
ξ Ursæ Majoris.....	1,44	1,51
	49	48
	49	49
	51	49
	44	49
	1,47	1,49

On voit que, si les résultats sont pratiquement équivalents pour ξ Ursæ Majoris, il n'en est pas de même pour ζ Bootis; en outre, pour les deux couples, le groupement des nombres obtenus par la méthode 4 *d* est nettement meilleur. Ajoutons que pour ζ Bootis les mesures contemporaines des autres observateurs confirment la valeur 1″,09.

Ces anomalies dans les résultats obtenus par la méthode du carré ne sont peut-être dues qu'au manque d'habitude; quoi qu'il en soit, elle a été abandonnée depuis la première année d'observations. Mais elle paraît la seule applicable pour les distances voisines du pouvoir séparateur lorsque l'état des images permet d'en aborder la mesure et à condition que les composantes du couple soient sensiblement égales. En effet, lorsque les disques empiètent, l'alignement équidistant (4 *d*) fait voir les deux images sous forme d'un bâtonnet où les quatre condensations se distinguent mal; le pointé manque absolument de sensibilité. Si, dans le même cas on forme les images en carré, on obtient une figure dont la symétrie centrale (carré à coins arrondis) s'apprécie encore assez bien pour des allongements à peine perceptibles et sans qu'il soit nécessaire de distinguer les quatre images. Les conclusions des expériences précédentes ne s'appliquent peut-être pas à ce cas, en raison précisément du fait que la comparaison au laboratoire de la méthode du carré avec une méthode d'alignement n'a pu être faite que sur des couples nettement résolus. Aussi pourra-t-on y revenir sans crainte pour mesurer les couples très serrés et à composantes peu différentes. Elle peut comporter une erreur, ou simplement une dispersion plus grande, quand les disques sont bien séparés, qui disparaisse pour les couples non résolus (1).

(1) Une mission récente à l'Observatoire du Pic-du-Midi (avril 1947) m'a donné l'occasion de mesurer des couples à 0″,20 et en dessous, qui sont à la limite de séparation pour le réfracteur de 60^{cm}; vers 0″,3 nous avons pu, M. Lyot et moi-même, varier les méthodes et passer du carré à l'alignement (4 *d*). Les résultats des deux méthodes ne manifestent aucune différence systématique. En dessous de 0″,3, l'insensibilité de la méthode 4 *d* était évidente, alors que, par le carré, on continuait à obtenir des résultats parfaitement réguliers.

3. **Mesure des angles.** — Pour étudier les mesures d'angle, on a monté la bande de laiton percée des sept couples de trous sur l'un des supports de micromètre que l'Observatoire avait fait construire par la maison Prin. Ce support permettait de réaliser une rotation continue et de la lire à 1′ près. La bande de laiton était montée sur une pièce intermédiaire où elle pouvait être déplacée entre deux glissières, de façon à présenter sur l'axe de rotation l'un quelconque des sept couples artificiels. Le tout occupait l'emplacement de l'objet dans le montage expérimental (p. 119), l'axe de rotation dirigé suivant l'horizontale.

La recherche des erreurs dans les mesures d'angle suppose connue une seule constante qui est la vraie valeur de la lecture à obtenir au micromètre quand, faisant marquer une certaine division (d'ailleurs quelconque) au cercle côté objet, on mesure l'angle de position d'un couple donné par la méthode d'alignement usuelle à l'aide du micromètre à double image. Toutes les vraies valeurs à lire dans les autres positions du même couple s'obtiennent par addition des rotations lues sur le cercle côté objet, et il ne reste plus qu'à faire les différences *o-c*.

Dans le ciel, on dispose d'une direction privilégiée, celle du mouvement diurne, qui constitue, en outre, un repère sensible de l'origine. Au laboratoire, aucune origine n'est imposée et on l'a choisie d'après des considérations basées sur l'expérience. On a constaté que, pour juger d'un alignement, on cherche toujours à rapprocher la ligne des yeux de la direction de l'alignement; quand cela conduit à trop incliner la tête, on recherche une orientation perpendiculaire. On a donc placé le support de façon que le zéro corresponde sensiblement à la position horizontale des couples artificiels.

Pour obtenir tous les écarts *o-c*, il faudrait connaître la vraie lecture à faire au micromètre en mesurant l'angle du couple dans cette position initiale. On peut songer à matérialiser momentanément la direction du dédoublement au moyen d'un fil d'araignée, comme dans la détermination de la lecture du mouvement diurne. Mais il ne s'agit plus ici de faire défiler les deux images d'une étoile, écartée au maximum, sous ce fil à travers tout le champ de l'oculaire, ce qui permet d'orienter ce fil de façon précise; il y a une véritable mesure avec fil de l'angle d'un couple de quelques secondes d'écartement. En outre, on ne peut opérer que sur un couple à la fois et la constante trouvée ne vaudra que pour lui et tant qu'on ne touchera pas à la plaque de laiton percée des sept paires de trous.

On a préféré supposer que l'erreur en angle était nulle au voisinage de l'horizontale. Pour des rotations égales des deux cercles (objet et micromètre), la somme Σ des lectures restait constante. Si l'on constatait une variation régulière de cette somme, il fallait conclure à un écart systématique.

Le passage d'un couple à un autre, ou simplement le fait de reprendre

les mesures après avoir utilisé le micromètre à l'équatorial, faisait varier la valeur de Σ d'une série à l'autre. Pour pouvoir comparer entre eux les résultats de toutes les séries, on a rapporté, dans chaque série, les diverses valeurs trouvées pour Σ :

1° à la valeur moyenne pour la série complète;
2° à la valeur trouvée pour l'horizontale.

Précisons un point très important sur la façon d'effectuer ces mesures. Il a semblé rationnel, pour que les résultats aient un sens pratique, d'opérer autant que possible dans les conditions réelles. Aussi n'a-t-on pas cherché à suivre un couple faisant avec la ligne des yeux (cette dernière restant horizontale) un angle croissant, ce qui eût constitué un problème peut-être intéressant, mais différent. Partant de la direction origine voisine de l'horizontale, on a fait les mesures pour des inclinaisons de 0, 15, 30 et 45° en tournant la tête progressivement et de façon naturelle, comme sur le ciel, puis on l'a penchée franchement dans l'autre sens pour retrouver le couple perpendiculaire à la ligne des yeux à 60, 75 et 90°. Cette façon de faire peut paraître incohérente, mais elle est certainement la plus proche de celle que l'on adopte d'instinct dans les observations.

Il s'ensuit dans les *o-c* une discontinuité assez nette entre 45 et 60°. On a donc étudié en quelques séries spéciales les environs de 45° dans les deux positions de la tête, la ligne des yeux se plaçant dans la direction du couple, puis dans la direction perpendiculaire; cela pour $i = 35$, 40, 45, 50 et 55°.

Voici les valeurs des *o-c* de 21 séries ordinaires et de 5 séries spéciales. Pour les premières, on donne :

ε écart *o-c* rapporté à sa valeur moyenne de la série;
ε' écart *o-c* diminué de l'écart trouvé pour $i = 0$.

La distance équivalente du couple artificiel était de 3″.

Pour chacune des séries spéciales, on a fait également une mesure dans la position horizontale; les écarts sont diminués de celui trouvé pour $i = 0$. On donne ces écarts pour les deux positions de la tête et leur différence.

Examinant d'abord le Tableau XII, on constate que la dispersion des ε' est légèrement supérieure à celle des ε; cela vient évidemment de ce que les ε' représentent des différences entre deux erreurs dont la dispersion est la même, alors que les ε s'obtenaient en rapportant les *o-c* à une moyenne reposant sur la série entière. La dispersion de cette moyenne, certainement inférieure à celle d'un écart isolé, ne peut, toutefois, être nulle; c'est pourquoi le rapport des écarts moyens des ε' et des ε est un peu inférieur à $\sqrt{2}$.

Considérant donc de préférence les ε, on constate ensuite que, malgré une dispersion de l'ordre de 10′ (au demeurant fort acceptable dans ce genre de mesures), la discontinuité entre 45 et 60° apparaît nettement; le sens des écarts pour $i = 60°$ est incontestablement systématique, puisqu'une seule des 21 séries a donné un écart négatif (— 2′). Quant aux écarts eux-mêmes, ils sont de l'ordre du dixième de degré dans toutes les autres positions (1); la seule erreur systématique en angle qui ressorte de ce tableau est donc due au changement de position de la tête en passant de 45 à 60°.

Les résultats des séries spéciales, rapportés dans le Tableau XIII, vont nous permettre de préciser davantage l'allure du phénomène.

TABLEAU XII.

Erreurs systématiques dans les mesures d'angle.

	0°.		15°.		30°.		45°.	
i. Série.	ε.	ε′.	ε.	ε′.	ε.	ε′.	ε.	ε′.
1.....	+ 6′	0	—23′	—29′	—23′	—29′	— 4′	—10′
2.....	+24	0	+38	+14	+ 4	—20	—18	—42
3.....	+ 6	0	+ 5	— 1	+ 1	— 5	+ 6	0
4.....	— 5	0	+16	+21	— 3	+ 2	—24	—19
5.....	+12	0	+ 3	— 9	+11	— 1	— 7	—12
6.....	+ 2	0	+ 3	+ 1	—10	—12	— 9	—11
7.....	— 2	0	+ 7	+15	— 4	+ 4	+ 2	+10
8.....	0	0	— 4	— 4	+10	+10	— 6	— 6
9.....	+ 1	0	+ 7	+ 6	+ 1	0	+ 4	+ 3
10.....	+ 5	0	+ 3	— 2	+ 5	0	— 9	—14
11.....	+ 4	0	— 2	— 6	+ 9	+ 5	—14	—18
12.....	+ 2	0	+ 1	— 1	+ 8	+ 6	— 4	— 6
13.....	0	0	— 1	— 1	+ 5	+ 5	+11	+11
14.....	+ 6	0	— 3	— 9	0	— 6	+ 1	— 5
15.....	+ 3	0	+ 3	0	— 7	—10	— 3	— 6
16.....	+ 4	0	+ 1	— 3	+ 3	— 1	— 1	— 5
17.....	+ 1	0	+ 1	0	+ 8	+ 7	+ 1	0
18.....	—11	0	+16	+27	+ 3	+14	—10	+ 1
19.....	— 6	0	+18	+24	+ 3	+ 9	—12	— 6
20.....	— 4	0	+20	+24	+ 3	+ 7	—19	—15
21.....	—12	0	+25	+37	—12	0	—15	— 3
	+ 1,4	0	+ 6,4	+ 5,0	+ 0,7	— 0,7	— 6,2	— 7,6
Ecart moyen...	5,5	0	8,1	12,2	5,7	7,3	7,1	8,5

(1) L'écart pour $i = 0$ est pratiquement nul, ce qui vérifie la légitimité de l'hypothèse faite plus haut.

TABLEAU XII (*suite*).

	60°		75°		90°	
	ε.	ε′.	ε.	ε′.	ε.	ε′.
1.....	+31′	+25′	+18′	+12′	+ 8′	+ 2′
2.....	— 2	—26	—18	—42	—31	—55
3.....	+12	+ 6	+ 4	— 2	—36	—42
4.....	+26	+31	+ 5	+10	—14	— 9
5.....	+ 4	— 8	—15	—27	— 5	—17
6.....	+16	+14	+ 8	+ 6	—12	—14
7.....	+31	+39	—22	—14	—16	— 8
8.....	+21	+21	— 6	— 6	—18	—18
9.....	+13	+12	—18	—19	— 8	— 9
10.....	+ 9	+ 4	— 2	— 7	—12	—17
11.....	+12	+ 8	+ 1	— 2	— 9	—13
12.....	+ 7	+ 5	—10	—12	— 5	— 7
13.....	+18	+18	—26	—26	— 5	— 5
14.....	+ 9	+ 3	— 3	— 9	—13	—19
15.....	+ 8	+ 5	— 2	— 5	— 4	— 7
16.....	+26	+22	—16	—20	—17	—21
17.....	+14	+13	—14	—15	—12	—13
18.....	+ 6	+17	— 7	+ 4	— 9	+ 2
19.....	+15	+21	—11	— 5	— 8	— 2
20.....	+ 9	+13	— 3	+ 1	— 8	— 4
21.....	+10	+22	— 1	+11	+ 3	+15
	+14,1	+12,6	— 6,6	— 7,6	—11,0	—12,4
Écart moyen...	6,9	9,2	8,8	10,0	6,8	9,9

TABLEAU XIII.

Erreurs en angle. Séries spéciales.

i	35°			40°			45°		
Série.	(=).	(⊥).	diff.	(=).	(⊥).	diff.	(=).	(⊥).	diff.
1.....	—1′	+45′	+46′	— 3′	+25′	+28′	—3′	+17′	+20′
2.....	+6	+34	+28	— 4	+17	+21	-2	+13	+15
3.....	—7	+50	+57	— 2	+50	+52	- 4	+25	+29
4.....	—1	+40	+41	+ 7	+26	+19	+4	+33	+29
5.....	—2	+40	+42	—15	+32	+47	- 6	+21	+27
	—1	+42	+43	— 3	+30	+33	— 2	+22	+24

TABLEAU XIII (*suite*).

i	50°			55°		
Série.	(=).	(⊥).	diff.	(=).	(⊥).	diff.
1.....	+ 1′	+17′	+16′	+ 6′	+22′	+16′
2.....	—14	+15	+29	+ 2	+26	+24
3.....	—13	+21	+34	— 7	+25	+32
4.....	+ 2	+23	+21	+ 6	+22	+16
5.....	—15	+20	+35	—11	+16	+27
	— 8	+19	+27	— 1	+22	+23

Nota. — Dans ce tableau, les $o - c$ donnés sous le signe (=) sont ceux des mesures faites dans la position de la tête *parallèle* à la direction du couple; ceux indiqués par le signe (⊥) correspondant à la position perpendiculaire.

Les écarts donnés dans ce tableau sont rapportés à la valeur de la lecture calculée à partir d'une mesure dans la position $i = o$; ils correspondent donc aux ε' du Tableau XII et peuvent être groupés avec eux en un même graphique. Distinguant ceux obtenus de o à 55° dans la position *parallèle* (points) de ceux donnés par les mesures en position *perpendiculaire* de 35 à 90° (croix), on voit les points représentatifs se placer sur deux courbes d'allure fort différente (*fig.* 61) et la raison de la discontinuité signalée plus haut apparaît avec évidence.

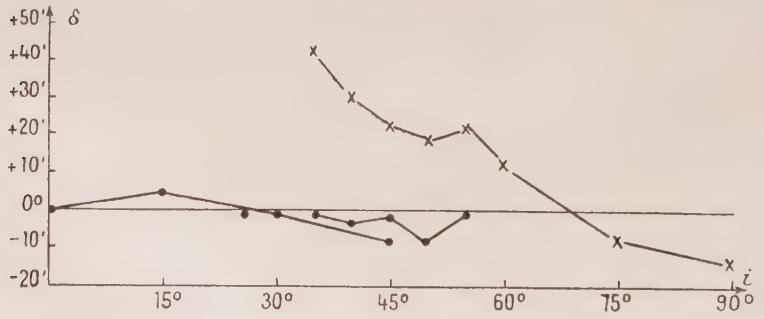

Fig. 61. — Erreurs systématiques dans la mesure des angles de position par double image. Écart *o-c* en fonction de l'inclinaison du couple sur l'horizontale. Ligne des yeux parallèle (.) ou perpendiculaire (×) au couple.

En effet, les deux courbes se raccordent sur l'axe des i, c'est-à-dire que l'on conserve une erreur petite en changeant de méthode; mais cela seulement après 60°. En outre, alors que la méthode *parallèle* ne donne lieu qu'à des erreurs de l'ordre du dixième de degré jusqu'à 55° (et peut-être au delà), la méthode *perpendiculaire* qui est pratiquement imposée

pour $i = 90°$, comporte une erreur importante et rapidement croissante dès que l'on s'écarte de la verticale de plus de 30°. Il semble que l'effort soit moindre pour continuer les mesures dans la position *parallèle* à plus de 45° de l'horizontale que pour le faire dans la position *perpendiculaire* à plus de 45° de la verticale.

Il n'y a pas à hésiter, en tous cas, sur la méthode à adopter pour $i = 45°$ et, sans doute, au delà, et qui doit être la première. Je ferai remarquer à ce sujet que l'expérience des observations paraît m'avoir fait prévoir ce résultat, puisque, d'instinct, je n'ai changé de méthode qu'à partir de 60° sans songer à appliquer les deux méthodes dans la position 45°; à moins que ce ne soient, au contraire, les habitudes prises qui aient alors donné des *o-c* faibles par une méthode plutôt que par l'autre.

Méthode du carré. — Nous avons dit que, pour les couples très serrés, le pointé d'équidistance par alignement était peu sensible dans les mesures de distance et que la formation du carré paraissait préférable. On peut songer à déterminer également l'angle de position du couple par le carré substitué à l'alignement. Les deux méthodes donnent-elles les mêmes résultats ?

La vérification a été faite sur un couple artificiel dans la position horizontale seulement; on a pris le n° 5, dont la distance fictive était alors 2″,7 environ et l'on a fait quatre séries de mesures croisées (alignement-carré-carré-alignement). Voici les huit différences trouvées dans le sens carré-alignement :

1.	2.	3.	4.	moyenne.
2°04′	1°53′	2°27′	1°33′	+2′,04′
2 07	2 06	2 31	1 47	

Une dernière mesure unique a donné + 2° 14′.

Cette erreur peut-être variable (l'accord dans une série est meilleur que de l'une à l'autre), est si nette et si importante qu'il ne m'a pas paru utile de l'étudier de plus près; la méthode ne doit pas être employée dans les observations.

4. **Conclusions.** — Parmi les conclusions que nous avons dégagées des expériences rapportées dans ce dernier chapitre, certaines peuvent être propres à l'observateur; ainsi, les erreurs des méthodes du losange pour les distances et du carré pour les angles. Mais il paraît bien établi quant à la mesure des étoiles doubles par double image :

1° que les méthodes d'alignement (d et $\frac{1}{4}\,d$) sont équivalentes et donnent les vraies distances, sans erreur systématique en fonction de la distance, jusqu'aux plus petits écartements mesurables; en quoi le procédé est évidemment supérieur à la méthode ordinaire;

2° que la mesure de l'angle par alignement ne comporte pas d'erreur sensible en fonction de l'angle, à condition de conserver la ligne des yeux parallèle à la direction du couple dans un domaine d'inclinaisons plus étendu que 45°, peut-être jusqu'à 60°.

Sommaire. — 1. Recherchant une application rationnelle de la méthode par double image aux mesures micrométriques, je la trouve dans un mode d'emploi nouveau d'un prisme biréfringent, grâce à une propriété de ces prismes jusque-là passée inaperçue. Je décris le phénomène et, dégageant ses causes, je définis la constante (*grandissement g*) qui le mesure; j'indique ensuite les valeurs de *g* pour les biréfringents classiques.

Mais, dans le nouveau dispositif, le dédoublement angulaire devient inutile et même indésirable; je détermine donc la forme d'un biréfringent qui en est dépourvu. Placé dans le micromètre, ce prisme donne deux images identiques et exemptes d'aberrations sensibles; en outre, il assure automatiquement la coïncidence des images au milieu du domaine des mesures possibles, ce qui permet d'effectuer ces dernières symétriquement, éliminant ainsi toute lecture de zéro.

L'écartement des images dépend du point du champ où se trouve l'étoile; je démontre que cet effet, d'ailleurs insensible, peut être supprimé par l'usage d'un prisme compensateur du même type que le premier.

Enfin, l'adjonction d'un analyseur tournant permet de transformer, à volonté, le micromètre en un photomètre différentiel genre Pickering, mais travaillant dans des conditions sensiblement meilleures; ceci en raison de la qualité des images, mais aussi parce que cet appareil est le premier de son genre à ne pas dédoubler le cercle oculaire.

Les résultats de trois années d'observations sont résumés dans une statistique des écarts internes et externes qui établit les propriétés avantageuses de la méthode :

a. la mesure d'une petite longueur sur l'image focale est obtenue par celle d'un déplacement 84 fois plus grand du prisme;

b. l'écart moyen d'une mesure est le même sur le rayon vecteur et sur l'arc, sa valeur étant de l'ordre du centième de la distance;

c. la dispersion des mesures dépend peu de la distance et se maintient à 1 % jusqu'aux environs du pouvoir séparateur.

Aussi a-t-on obtenu régulièrement, avec une lunette de 162^{mm} seulement, des mesures nettement plus précises que celles faites à l'aide de tous les micromètres filaires, montés généralement sur des instruments beaucoup plus puissants.

Quant aux mesures photométriques, elles donnent les Δm avec une précision de quelques centièmes, près de deux fois supérieure à celle des meilleures mesures visuelles antérieures.

2. J'indique le mode de calcul des deux constantes fondamentales, dédoublement angulaire δ et γ (inverse de g), d'un biréfringent de forme assez générale, et diverses applications. Je démontre incidemment la loi de fonctionnement du micromètre à boule de spath, établie empiriquement par Dawes; je définis plusieurs formes particulières de biréfringents, la plupart nouvelles, qui satisfont à diverses conditions, notamment les formes $\Gamma_0\,(\gamma = 0)$ et $\Delta_0\,(\delta = 0)$ qui font l'objet d'une discussion spéciale.

Je calcule ensuite la propagation d'un rayon quelconque dans un biréfringent, dans le but principal d'étudier les aberrations du faisceau transmis. On trouve que ces aberrations croissent avec l'angle de coupe et les dimensions du prisme, mais aussi avec la largeur du faisceau intercepté, ce qui explique l'échec du procédé Rochon dans le cas des étoiles doubles. Les résultats confirment également la supériorité du prisme à dédoublement nul sur ceux de forme classique sous ce rapport. Ce calcul conduit enfin, par des formules très simples, à dresser des tables numériques du dédoublement angulaire en fonction de l'angle d'incidence pour les biréfringents classiques et le prisme nouveau.

3. Diverses expériences de laboratoire sont consacrées à la vérification de certains résultats des calculs précédents et à l'étude des méthodes de mesure par double image sur des étoiles artificielles. La discussion de ces méthodes, jointe à l'expérience des observations, permet d'arrêter les détails d'une technique qui, dès maintenant, a fait largement ses preuves, et qui ne manquera pas de s'imposer à ceux qui en feront l'essai.

Vu et approuvé :

Paris, le 2 juillet 1947.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Jean CABANNES.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean SARRAILH.

SECONDE THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Sur la détermination des éléments des étoiles doubles visuelles

Vu et approuvé :
Paris, le 2 juillet 1947.
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Jean CABANNES.

Vu et permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean SARRAILH.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION 1

PREMIÈRE PARTIE. — *Le nouveau micromètre.*

I. Principe de la méthode par double image 2
II. Application aux mesures micrométriques 5
III. Principe et description de l'appareil 9
IV. Usages divers et résultats 32
V. Précision comparée de la méthode, et quelques autres caractéristiques de la dispersion des résultats 43

DEUXIÈME PARTIE. — *Étude théorique des prismes biréfringents.*

I. Calcul approché des deux constantes fondamentales 55
II. Calcul de la marche d'un faisceau homocentrique dans quelques biréfringents 81
III. Applications 96

TROISIÈME PARTIE. — *Vérifications expérimentales.*

I. Étude des prismes biréfringents 114
II. Étude des méthodes de mesure par double image 123

SOMMAIRE 136

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

130722 Quai des Grands-Augustins, 55.

Dépôt légal d'imprimeur, 1948, n° 455.

Achevé d'imprimer le 25 février 1949

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
130722 Quai des Grands-Augustins, 55.